Epästationaariset aikasarjat kl 2012, HT 3, viikko 6

1. Tarkastellaan VAR(1)–prosessia

$$y_t = Ay_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathsf{iid}\,(0, \Omega) \quad t = 1, 2, ...,$$

jonka ennustamista tarkasteltiin moniulotteisten aikasarjojen kurssilla VAR(p)–tapauksessa olettaen stationaarisuus (ks. monisteen jakso 2.3, s. 13-15). Optimaalista ennustetta johdettaessa ei kuitenkaan käytetty missään stationaarisuutta, jota käytetty optimaalisuuskriteerikään ei vaatinut. Aikaisemmasta voidaan siten päätellä, että sama ennustekaava pätee edellä esitetylle VAR(1)–prosessille, vaikka prosessin kerroinmatriisi A ei toteutakaan stationaarisuusehtoa, kunhan alkuarvo y_0 oletetaan riippumattomaksi virheistä $\{\varepsilon_t,\ t \geq 1\}$. Toisin sanoen, monisteen jakson 2.3 merkinnöin ajankohtana $t \geq 1$ muodostettu y_{t+h}:n optimaalinen ennuste toteuttaa differenssiyhtälön

$$y_t\,(h) = Ay_t\,(h-1)\,, \quad y_t\,(0) = y_t.$$

Tarkastellaan nyt erikoistapausta $A = I_n$ eli $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$.

(i) Mitä saadaan tässä tapauksessa ennusteen $y_t\,(h)$ ja ennustevirheen $y_{t+h} - y_t\,(h)$ lausekkeiksi?

(ii) Oletetaan nyt, että $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\,(0, \Omega)$. Mitä saadaan ennustevirheen jakaumaksi tässä tapauksessa? Selvitä myös mitä tapahtuu ennustettavan y_{t+h} komponenteille muodostetuille luottamusväleille, kun h kasvaa?

Huom.: Monisteen jaksossa 2.3 esitetty ennustekaava pätee myös VAR(p)–tapauksessa ilman stationaarisuutta, kunhan alkuarvot $y_0, ..., y_{-p+1}$ oletetaan riippumattomaksi virheistä $\{\varepsilon_t,\ t \geq 1\}$. Kohdan (ii) luottamusvälejä koskeva tulos pätee myös pääpiirteissään yleiselle integroituneelle VAR(p)–prosessille.

2. Perustele monisteen s. 56 mainitut Brownin liikkeen ominaisuudet

$$B\,(t) \sim \mathsf{N}\,(0, t\Sigma) \quad \text{ja} \quad \mathsf{Cov}\,(B\,(t)\,, B\,(t+u)) = t\Sigma, \quad u > 0$$

sekä vastaavat normaalisen satunnaiskulun $x_t = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j,\ \varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\,(0, \Sigma)$, ominaisuudet $x_t \sim \mathsf{N}\,(0, t\Sigma)$ ja $\mathsf{Cov}\,(x_t, x_{t+u}) = t\Sigma$, kun $u > 0$ on kokonaisluku.

3. Tarkastellaan monisteen s. 60 esitettyä mallia

$$\Delta y_t = \nu + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...,$$

jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}\left(0, \omega^2\right)$ ja $\nu = -\phi\mu$ (huomaa painovirhe s. 60, jossa pitää olla $\nu = -\phi\mu$ eikä $\nu = \phi\mu$). Oletetaan lisäksi, että $y_0 = 0$ ja että yksikköjuurihypoteesi $H_0 : \phi = 0$ on voimassa. Tällöin $y_t = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$ on (normaalinen) satunnaiskulku ja monisteen tulokset (6.2) ja (6.3) pätevät, kun x_{t-1}:n paikalla on y_{t-1}. Parametrin (ϕ, ν) SU–estimaattori on PNS–estimaattori

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\nu} \end{bmatrix} \overset{H_0}{=} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \\ \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t \\ \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Perustele samaan tapaan kuin monisteen s. 59 tulos

$$\begin{bmatrix} T\hat{\phi} \\ T^{1/2}\hat{\nu} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \int_0^1 B(u)^2\,du & \int_0^1 B(u)\,du \\ \int_0^1 B(u)\,du & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^1 B(u)\,dB(u) \\ \int_0^1 dB(u) \end{bmatrix} \qquad (**)$$

jossa $B(u) \sim \mathsf{BM}(\omega^2)$.

Vihje: Monisteen tulosten (6.2) ja (6.3) lisäksi voidaan osoittaa tulokset

$$T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T} x_{t-1} \xrightarrow{d} \int_0^1 B(u)\,du, \quad B(u) \sim \mathsf{BM}(\omega^2)$$

ja

$$T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \xrightarrow{d} \int_0^1 dB(u) \sim \mathsf{N}(0,\omega^2)$$

Muunna yhtälöä $(*)$ niin, että vasemmalle tulee vektori $(T\hat{\phi}, T^{1/2}\hat{\nu})$ ja kaikki oikealla olevan käännettävän matriisin ja sitä seuraavan vektorin alkiot tulevat jaetuiksi sopivilla T:n potensseilla siten, että pääset käyttämään tuloksia (6.2) ja (6.3) sekä edellä mainittuja tuloksia. Tämän muunnoksen toteuttamisessa kannattaa ehkä ottaa käyttöön diagonaalimatriisi $D_T = \mathsf{diag}\left[T \quad T^{1/2}\right]$, jolla kertomalla yhtälö $(*)$ vasemmalta ja manipuloimalla oikeaa puolta saadaan aikaiseksi tarvittavat T:n potensseilla jakamiset. Lopuksi voit vedota Liitteen B Lauseeseen B.2 (tässä tarvitaan tarkkaan ottaen sitä, että kaikki tarvittavat jakaumakonvergenssit pätevät yhteisjakaumien tasolla).

4. Jatkoa edelliselle. (i) Totea, että

$$\int_0^1 \bar{B}(u)^2\,du = \int_0^1 B(u)^2\,du - \left(\int_0^1 B(u)\,du\right)^2.$$

(ii) Osoita, että estimaattorille $\hat{\phi}$ pätee H_0:n voimassa ollessa

$$T\hat{\phi} \xrightarrow{d} \left(\int_0^1 \bar{W}(u)^2\,du\right)^{-1} \int_0^1 \bar{W}(u)\,dW(u),$$

jossa $W(u) \sim \mathsf{BM}(1)$ ja $\bar{W}(u) = W(u) - \int_0^1 W(t)\,dt$ on sen keskistetty versio (vastaavasti $\bar{B}(u)$ kohdassa (i)).

Vihje: Kohdassa (i) voit (Brownin liikkeen realisaatioiden jatkuvuuden paerusteella) integroida tavanomaiseen tapaan (välittämättä Bownin liikkeen satunnaisuudesta). Kohdassa (ii) tulee kohdan (i) laskukaavan lisäksi käyttöön myös (hivenen hankalammin perusteltavissa oleva) laskukaava

$$\int_0^1 B(u)\,dB(u) - \int_0^1 \left(\int_0^1 B(u)\,du\right) dB(u) = \int_0^1 \left(B(u) - \int_0^1 B(u)\,du\right) dB(u).$$

Kohdassa (ii) pääsee alkuun laskemalla tehtävän 3 tuloksen $(**)$ oikealla puolella oleva käänteismatriisi (tuttua) 2×2 matriisin käänteismatriisin laskukaava käyttäen, suorittamalla kertolasku ja ratkaisemalla tulon ensimmäinen komponentti. Määrittelemällä tämän jälkeen $W(u) = \omega^{-1}B(u)$ kuten monisteessa s. 59 loppupuolella saadaan haluttu tulos.

Huom.: Kohta (ii) osoittaa, että tehtävän 3 vakion sisältävässä AR–mallissa voi testata yksikköjuurta käyttäen testisuuretta $T\hat{\phi}$, jonka asymptoottisen jakauman prosenttipisteitä on taulukoitu. Vaihtoehtoinen (ja tavallisemmin käytetty) testisuure on monisteessa s. 60 loppupuolella mainittu "t–suhde" τ_μ, jonka monisteessa mainittu asymptoottinen jakaumatulos voidaan johtaa edellä mainittuja tuloksia käyttäen. Tiedoksi, että edellä kaytettyjen tulosten laajennusten avulla voidaan johtaa myös yksikköjuuritesti mallissa

$$\Delta y_t = \nu_1 + \nu_2 t + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...,$$

johon voidaan päätyä lähtemällä yhtälöistä $y_t = \mu_1 + \mu_2 t + x_t$ ja $\Delta x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ $(t = 1, 2, ...)$. Tässä mallissa testisuureena voidaan käyttää ϕ:n estimaattiin liittyvää "t–suhdetta", jonka asymptoottisen jakauman prosenttipisteitä on taulukoitu (useat tietokoneohjelmat tulostavat niitä kuten muihinkin vastaaviin yksikköjuutitesteihin liittyviä prosenttipisteitä automaattisesti). Kaikkia näitä "t–suhteisiin" perustuvia testejä voidaan käyttää samalla tavalla myös AR(p)–tapauksessa, jolloin esimerkiksi viimeksi mainitun mallin paikalla on

$$\Delta y_t = \nu_1 + \nu_2 t + \phi y_{t-1} + \phi_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \phi_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ... \, .$$

Viipymien $\Delta y_{t-1}, ..., \Delta y_{t-p+1}$ lisääminen malleihin ei muuta yksikköjuuritestien asymptoottisia jakaumia (toisin kuin vakion tai lineaaarisen aikatrendin lisääminen).