

# The theory that would not die

- **Bayesin kaavan lyhyt historia**

Lähde:

– S B McGrayne: The theory that would not die: how Bayes' rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, and emerged triumphant from two centuries of controversy.

Yale University Press, 2011.

# Olipa kerran Bayes

- 1740-luvulla: pastori Bayes. *T. Bayes.*
  - Opiskeli Edinburghissa teologiaa ja ilmeisesti matematiikkaakin
  - 1748: David Hume (Edinburgh): "we can rely only on what we learn from experience"
    - Emme voi olla varmoja että juuri tietty syy aiheuttaisi juuri tietyn seurauksen → vain todennäköisiä syitä ja todennäköisiä seurauksia.
    - **Newtonin mekaniikka oli luvannut jotain eksaktimpaa.**

# Olipa kerran Bayes

- 1740-luvulla: pastori Bayes.
  - Bayes alkoi pohtia syiden ja seurauksien todennäköisyyksiä.
  - Todennäköisyyslaskenta tuolloin antoi vastauksen vain yhteen suuntaan:  $P(\text{seuraus} \mid \text{syy})$ .
  - Tätä ei osattu laskea:  $P(\text{syy} \mid \text{seuraus})$ 
    - Ns. "inverse probability"
    - "Millä todennäköisyydellä noppa on painotettu jos viidellä heitolla on saatu 5 kuutosta?" → "millä todennäköisyydellä seuraava heitto on kuutonen?"

# Olipa kerran Bayes

- 1740-luvulla: pastori Bayes.
  - Newton, joka kuoli 1727, oli painottanut havaintojen merkitystä, kehittänyt teorian selittääkseen ne, ja ennustanut teoriallaan uusia havaintoja. Mutta ei pohtinut mikä painovoiman aiheutti, tai kuinka tosi tämä teoria oli.
  - *Cause, effect, uncertainty...*
    - Bayes etsi ratkaisua
    - 1746-1749 **Heureka!**

# Olipa kerran Bayes

- Bayesin ratkaisuesimerkki:
  - Kuvitellaan tasainen suorakulmainen pöytä
  - Avustaja heittää pallon ”sattumanvaraisesti” pöydälle ja merkitsee mihin se pysähtyy. (Ei kerro Bayesille).
  - Avustaja heittää uusia palloja pöydälle ja kertoo kummalle puolelle ensimmäisen pallon paikkaa ne pysähtyvät.
  - Jos esim. kaikki pallot jäävät oikealle puolelle, mitä päättelemme ensimmäisen sijainnista?

# Olipa kerran Bayes

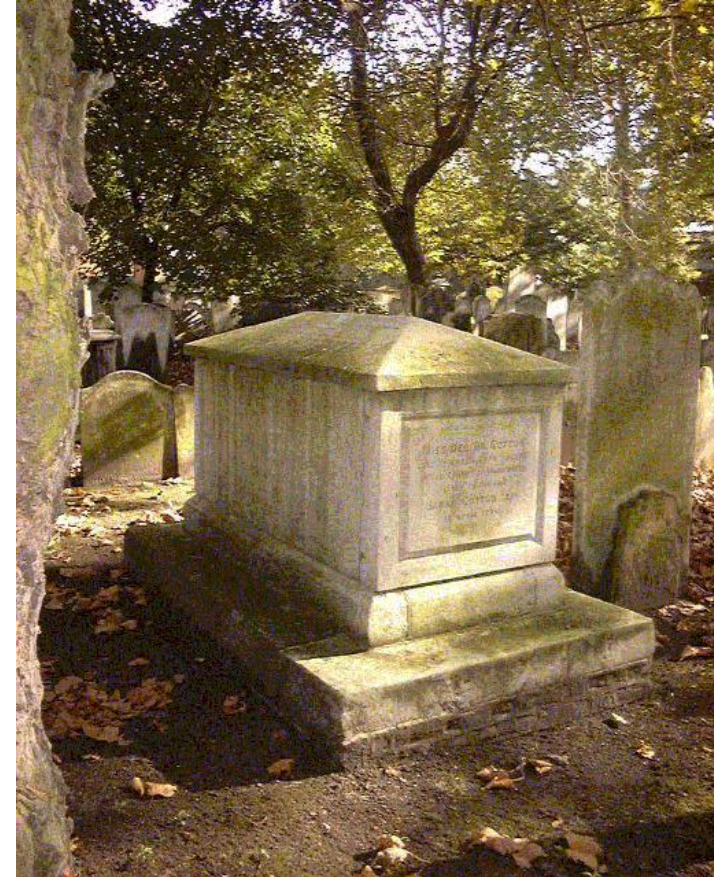
- Bayesin ratkaisuesimerkki:
  - Mitä enemmän palloja heitetään, sitä suuremmalla varmuudella voimme päätellä ensimmäisen pallon sijainnin.
  - *Tämä on havainnoista oppiva systeemi.*
  - Ennen havaintoja, mikä tahansa sijainti on yhtä mahdollinen → tasajakauma  $\text{Uniform}(0,1)$ 
    - Ymmärrettävä valinta jos ensimmäinen pallo heitetään "sattumanvaraisesti" → yleistettävissä?

# Olipa kerran Bayes

- Bayesin esimerkki tulkittuna nykymerkinnöin:
  - Havaintojen  $X$  ehdollinen jakauma  $P(X | p)$ :
    - Binomial( $N, p$ ) missä  $p$  = tuntematon sijainti välillä  $[0, 1]$
  - Halutaan laskea  $P(p | X)$
  - Huomataan:  $P(X, p) = P(X | p)P(p) = P(p | X)P(X)$
  - Ratkaistaan:  $P(p | X) = P(X, p) / P(X) = P(X | p)P(p) / P(X)$
  - Tunnetaan nykyään Bayesin kaavana!
    - $P(X | p)$  voidaan kirjoittaa ja laskea: binomi tf.
    - $P(p)$  on **tasajakauman** tf. (**ns priorijakauma**)
    - $P(X)$  on normalisoiva tekijä =  $\int P(X | p)P(p) dp = \text{vakio}$

# Olipa kerran Bayes

- Bayesin ratkaisuesimerkki:
  - Saadaan siis  $P(p | X)$ , ns. **posteriorijakauma**.
  - Tämä on  $\text{Beta}(X+1, N-X+1)$
  - Bayes jätti keksinnön pöytälaatikkoon. Näin kävi Bayesin kaavalle myöhemmin monta kertaa.
  - Bayes kuoli 1761. Richard Price tutki paperit ja julkaisi ne.





# Olipa kerran Bayes-Price

- Price editoi ja korjaili käsikirjoitusta 2 vuotta
  - “an imperfect solution of one of the most difficult problems in the doctrine of chances”
  - Kirjoitus oli vastaus Humen kritiikille syiden ja seurausten yhteydestä.
  - Royal Society’s Philosophical Transactions: *“An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances”*. 1763.
  - Bayesin kaava → Bayes-Price kaava?

# Olipa kerran Bayes-Price

- **Price** löysi Bayesin kaavan, huomasi sen merkityksen, korjasi virheet, kirjoitti puhtaaksi, editoi, löysi sille tarkoituksen.
- **Bayes** ei luonut nykyään tunnettuja käsitteitä: Bayesian statistics, Bayes rule, tai Bayesian inference. Nämä vasta 1950-luvulla.
- **Bayes** ei osoittanut muita käyttötarkoituksia kaavalle kuin esimerkissä esitetty ongelma.

# Olipa kerran Laplace

- Bayesin ja Pricen jälkeen juuri kukaan ei tehnyt kaavalla mitään. *Kunnes:*
- "The man who did everything"

**Pierre Simon Laplace**

1749-1827



# Olipa kerran Laplace

- Kymmenvuotias Laplace vaikutti suuresti **Halley'n komeetan** ennustuksesta.
- Astronomit Clairaut, Lalande, Lepaute onnistuivat ratkaisemaan vaikean kolmen kappaleen ongelman ja ennustamaan että Jupiterin ja Saturnuksen painovoima viivästyttäisi komeettaa, joka saapuisi huhtikuussa  $1759 \pm 1$  kuukausi.

# Olipa kerran Laplace

- Myöhemmin Laplace sanoi että juuri tämä sai hänen sukupolvensa ajattelemaan että epätavallisetkin asiat **olivat luonnonlakien seurausta**, joita voitiin matemaattisesti selvittää.

# Olipa kerran Laplace

- D'Alembert kehotti tutkimaan astronomiaa.
- Polttava kysymys: oliko maailmankaikkeus stabiili?
- Newtonin **teoria vs havainnot**.
  - teoria vahvistetaan tarkoilla havainnoilla.

# Olipa kerran Laplace

- Laplace huomasi: **suuri ongelma oli datassa!**
- Empiiriset tutkimukset planeetoista perustuivat vanhoihin datoihin **Kiinasta 1100 EAA**, **Mesopotamiasta 600 EAA**, **Kreikasta 200 EAA**, **Roomasta 100-luvulta**, **Arabeilta 1000-luvulta**.
- Paljon epätarkkuutta, virheitä, puutteita.

# Olipa kerran Laplace

- Mutta uusia mittauksia alkoi kertyä yhä lisää.
  - Venuksen ohitusaika auringon yli, mitattuna 120 paikassa maapallolla.
    - Vertaamalla mittauksia Ranskalaiset matemaatikot arvioivat maan etäisyyden auringosta.
    - Silti uusimmatkin mittaukset saattoivat olla ristiriitaisia ja sisältää virheitä.
- Tarve analysoida mutkikkaita empiirisiä aineistoja vain kasvoi.**



# Olipa kerran Laplace

- Astronomit tyypillisesti laskivat mittauksista keskiarvon.
  - Kuulostaa järkevältä keinolta eliminoida virheitä.
  - Mutta mihin tämä perustuu, sitä ei osattu todistaa. Oli vain *ad hoc* –periaate.

# Olipa kerran Laplace

- Laplace alkoi ajatella että todennäköisyys olisi väline jolla käsitellä epävarmuuksia jotka liittyivät läpikotaisin moniin havaintoihin ja niiden syihin.
  - Löysi vanhan kirjan uhkapelien todennäköisyyksistä
    - [de Moivre: The Doctrine of Chances.](#)
  - Bayes oli lukenut saman kirjan aiemman painoksen.

# Olipa kerran Laplace

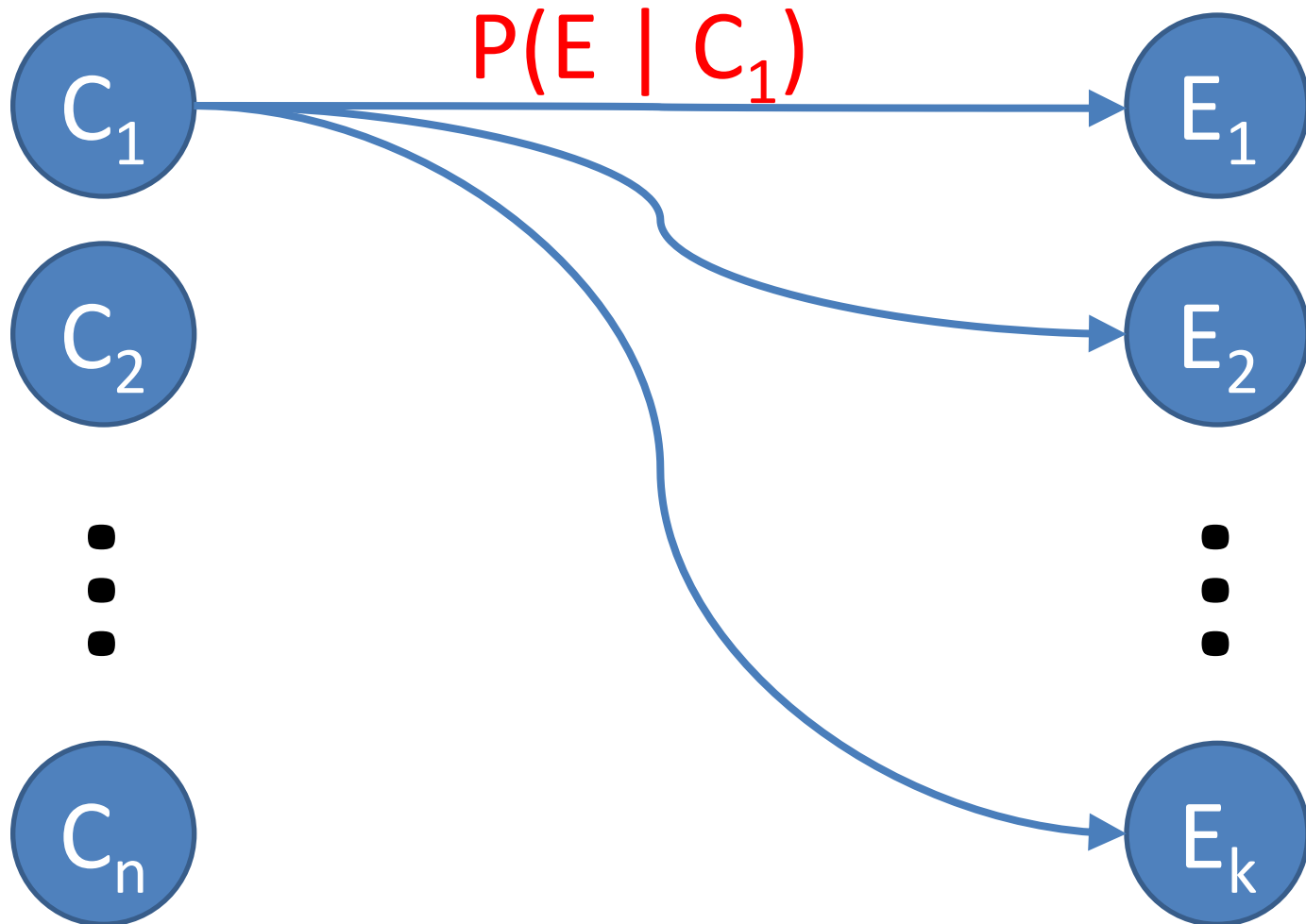
- Taivaan mekaniikka ja havainnot vaikuttivat niin monimutkaisilta, että tarkkoja laskuja ei voinut odottaa.
  - Todennäköisyys voisi olla hyödyllinen väline.
  - D'Alembert piti todennäköisyyttä liian subjektiivisena.
  - Laplace: Mémoire on the Probability of the Causes Given Events.
    - Ensimmäinen versio siitä mitä nyt kutsumme Bayesin kaavaksi !

# Olipa kerran Laplace

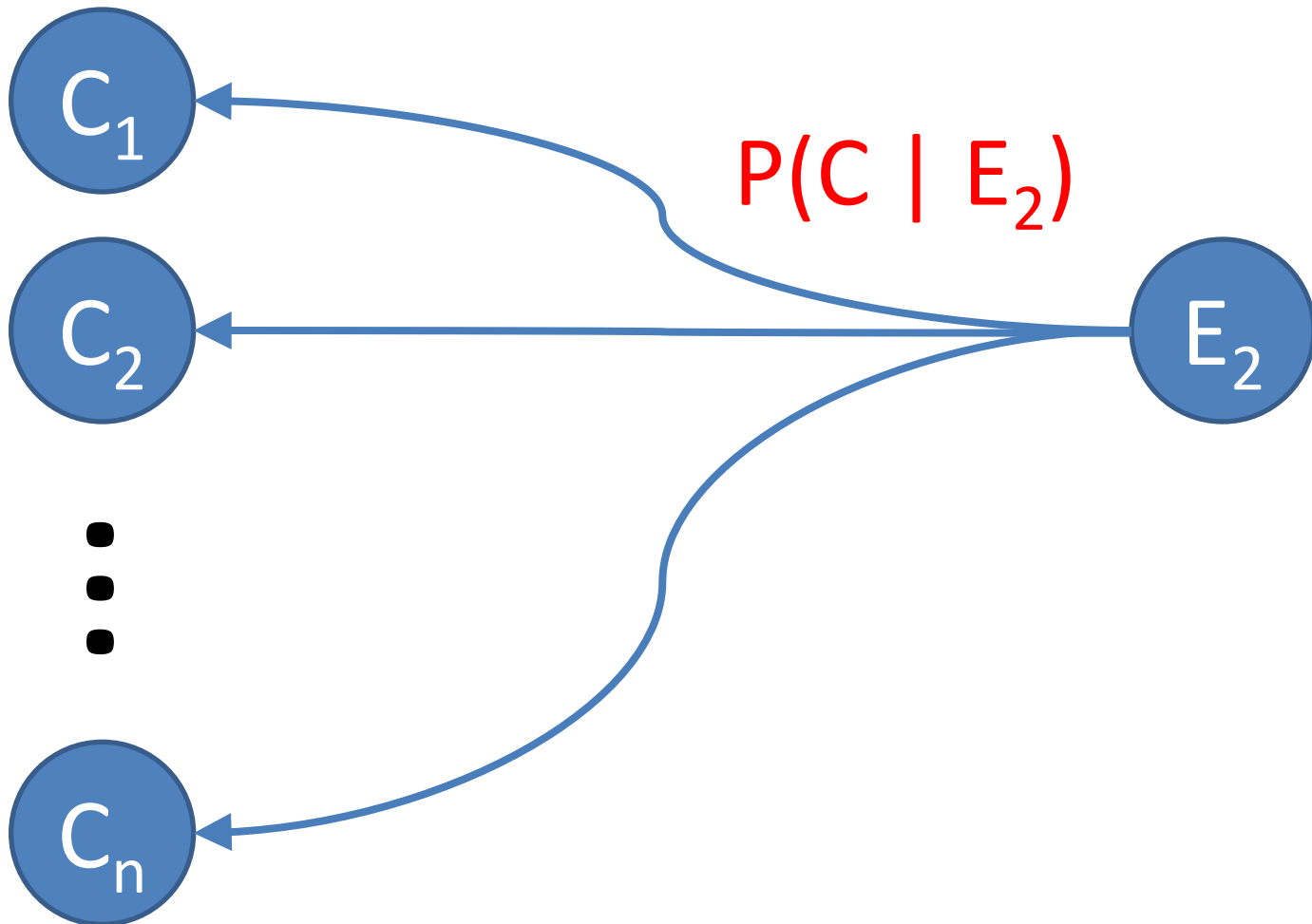
- Laplace ei tuolloin vielä kirjoittanut Bayesin kaavaa, mutta kuvasi sen sanallisesti.
  - Oivallus: luetellaan kaikki mahdolliset syyt C, ja arvioidaan niitä havainnon E saatuamme.
  - Kaavana:

$$P(C_i | E) = P(E | C_i) / [P(E | C_1) + \dots + P(E | C_n)]$$

# Olipa kerran Laplace



# Olipa kerran Laplace



# Olipa kerran Laplace

- Keksimällään periaatteella Laplace kykeni tekemään kaiken mitä Bayes olisi voinut tehdä.
  - Kunhan oletti että kaikki syyt C olivat yhtä mahdollisia ennen havainnon E huomioimista.
  - **Voilà !** → Yleinen menetelmä kaikkeen tutkimukseen!

# Olipa kerran Laplace

- Mutta periaatteen matemaattinen ratkaisu oikeissa ongelmissa osoittautui vaikeaksi jopa Laplacelle.
  - Vielä nykyäänkin laskennallinen taakka varjostaa Bayes-menetelmien käyttöä!



# Olipa kerran Laplace

- Laplace aloitti yksinkertaisesta:
  - Pussissa on tuntematon osuus valkoisia ja mustia palloja.
  - Poimitaan pussista palloja, joiden värit todetaan.
  - Mikä on todennäköisyys että seuraava pallo on musta?
  - Laplace kirjoitti 45 yhtälöä ratkaistakseen edes tämän.

# Olipa kerran Laplace

- Laplace keksi Bayesin kaavan, tuntematta sitä ennalta.
  - **Bayes** työläästi vakuutteli miksi eri syille oli järkevä valita yhtä suuri priorinen todennäköisyys.
  - **Laplace** oletti tämän vaistonvaraisesti (principle of insufficient reason).
  - **Bayes** esitti vain yhden esimerkin.
  - **Laplace** kehitti kaavaa ja sovelluksia 40 vuotta.  
"He transformed and mathematized everything he touched".

# Olipa kerran Laplace

- 1781 Price vierailee Pariisissa ja kertoo ranskalaisille Bayesin kaavasta.
- Laplace saa näin vahvistuksen ajatuksilleen.
- Sittemmin uusia huolia:
  - Rasitteena yhtä suuret prioriset todennäköisyydet.
  - **Vakavia** teknisiä laskentaongelmia käytännössä.

# Olipa kerran Laplace

- Yhä uusia vaikeita sovelluksia: 1771 Ranskassa määrättiin provinssit raportoimaan syntymä- ja kuolematilastoja Pariisiin.
  - Tuloksista näkyi että poikia syntyi hieman enemmän kuin tyttöjä. **Mutta X % ?**
  - Binomijakauma sopii tähän, ja dataa oli paljon.
- Sopiva ongelma Laplacelle!

# Olipa kerran Laplace

- Mutta jos oletetaan poikien osuudeksi esim. 52%, ja havaitaan 58000 poikaa, niin lasketaan  $0.52^{58000}$ , ja yhtä vaikea lasku tytöille.
  - Edes Laplace ei halua laskea tätä käsin.
  - Oli pakko keksiä matemaattisia keksintöjä joita voi käyttää oikopolkuina.
  - Matemaattista pyrotekniikkaa, joka turhautti Laplacen opiskelijoita: ”helposti nähdään että...”

# Olipa kerran Laplace

- Laplace haali syntymä- ja kuolematilastoja kaikkialta, ja yhdisti aiempiin tietoihinsa.
  - Ensimmäinen todellinen Bayes-analyysi, jossa uusi evidenssi päivittää aiempaa todennäköisyyttä.
  - Matemaattinen malli tieteelliselle päättelylle.
  - Johtopäätös vihdoinkin vasta 1812: ”syntyvien poikien suurempi osuus näyttää olevan yleispätevä sääntö ihmiskunnalle”.

# Olipa kerran Laplace

- Laplace arvioi Ranskan väkilukua.
  - Aiempi arvio perustui joidenkin seurakuntien tarkkoihin tietoihin ja syntymien määrään.
    - Väestö = Ranskan syntymien määrä  $\times 26 \approx 25,3$  milj.  
Kukaan ei tiennyt miten tarkka tämä on.
  - Laplace yhdisti aiemman tiedon seurakuntien syntymä-kuolema tilastoista uuteen tietoon Itä-Ranskan tarkoista väkiluvuista.
  - 1786 Laplace päätyy estimaattiin joka on lähellä nykytiedon mukaista arviota 28 milj.

# Olipa kerran Laplace

- 1810-1814 Laplace keksii vihdoin yleisen kaavan:

$$P(C_i | E) =$$

$$P(E | C_i)P(C_i) / [P(E | C_1)P(C_1) + \dots + P(E | C_n)P(C_n)]$$

**”It was the formula he had been dreaming about”**

→ Bayesin-Pricen esimerkistä Laplacen kaavaan.



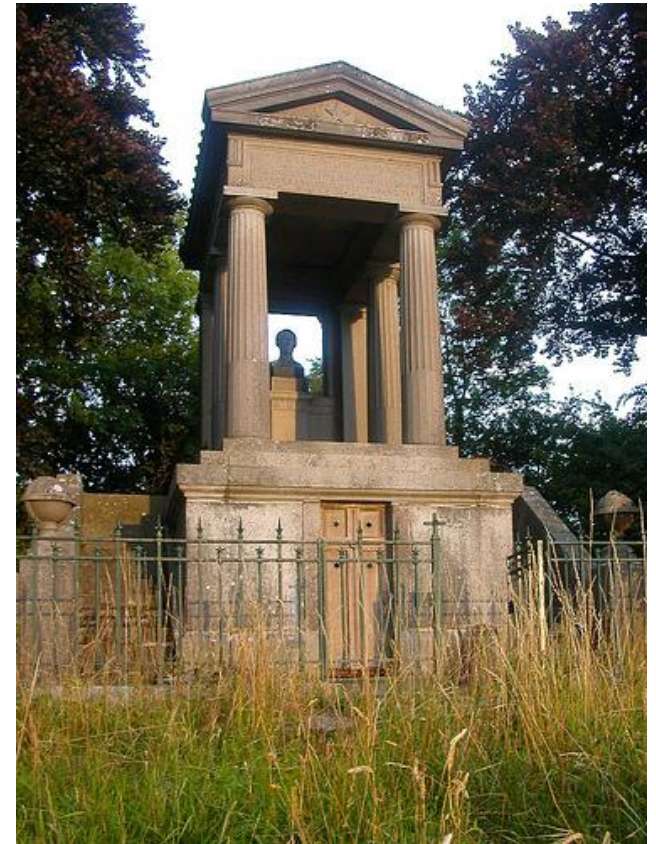
# Olipa kerran Laplace

- Laplacen todennäköisyyslaskut nojasivat silti intuition: "essentially, the theory of probability is nothing but good common sense reduced to mathematics".
- *Millaisia Laplacen sovellusongelmat olivat?*
  - *Dataa monesta eri lähteestä.*
    - *Monenlaista epävarmuutta ja epätarkkuutta.*
  - *Ei suoraviivaisen toistokokeen tilannetta.*
  - *Uransa lopussa kehitti myös frekventististä lähestymistapaa.*

# Olipa kerran Laplace

- *Mechanique Celeste*
- *Exposition du Systeme du Monde*
- *Theorie Analytique des Probabilités*

Laplace



(St. Julien-de-Mailloc)

# Frekvenssin aika

- Laplacen jälkeen 1827-
  - Laplacen maine kärsi (perättömistä) syytöksistä.
  - Bayesin kaava epäsuosioon.
  - **Tilastointi laajenee**: objektiivisten faktojen luettelointia, ei nähty tarvetta matemaattiselle analyysille. Byrokraatit raportoivat tilastoja, jotka kertovat faktoja. Subjektiivisuus on pahasta.
    - "Facts, pure facts"
    - "Statistician has nothing to do with causation"

# Frekvenssin aika

- **Objektiivisuus**: Tapauksen todennäköisyys on se kuinka monta kertaa se esiintyy monessa havainnossa → objektiivinen frekvenssi.
- Bayesin kaava tuomittiin tasapriorin vuoksi.
  - Boole, Venn, Mill.
  - **Subjektiivinen**, ei perustu tietoon – vaan tietämättömyyteen (ignorance, insufficient reason)
  - Harvat edes ajattelivat muunlaisia prioreita.
- Kahden sukupolven jälkeen Laplace muistettiin enää vain astronomian saavutuksistaan.

# Frekvenssin aika

- Teoreetikot hautasivat Bayes-Laplace kaavan.
- Kaava jatkoi eloaan toisaalla:
  - ***Astronomiassa***, koska frekventismi ei tarjonnut kelvollista vaihtoehtoa näihin ongelmiin.
  - ***”In real life applications”***: hajanaisen evidenssin, tietoaukkojen, epävarmuuksien viidakossa: miten laskea mikä johtopäätös on todennäköisin?
  - Sovelluksien laskuoppikirjoissa kaava säilyi.

# Frekvenssin aika

- ***Bayes armeijan sovelluksissa***: tykistön laskentaongelmat ja monet epävarmuudet:
  - Vihollisen sijainti
  - Ilman tiheys
  - Tuulen suunta
  - Etäisyys, suunta, lähtönopeus
  - Tykkien ominaisuuksien vaihtelu

# Frekvenssin aika

- Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900)
  - Uudisti Bayesin kaavan käytön
  - *”Laplace’s probability of causes was the only valid method for verifying a hypothesis with new observations”*

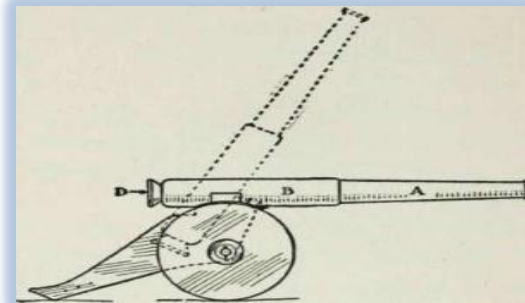


## MUTTA:

- Tasaprioria tulisi käyttää vain harvoissa tapauksissa joissa hypoteesien tiedetään olevan yhtä mahdollisia tai jos *mitään* niistä ei tiedetä.

# Frekvenssin aika

- 1880 – toinen maailmansota: Ranskan ja Venäjän tykistö ampui Bertrandin oppikirjan kaavojen mukaan.
- Bayes-taulukoita ammuksien testaamiseen:
  - Tarvittiin vain 20 lipasta 20000 lippaan laatikosta.
  - Testi voitiin lopettaa kun riittävä varmuus oli saatu (ei ennalta määrättyä testilippaiden määrää).
- Toisen maailmansodan aikaan britit ja amerikkalaiset keksivät samanlaisia (Bayes) menetelmiä → kutsuivat niitä ”*operations research*”.







# Frekvenssin aika

- **USA:** teollistumisen aika & 1. maailmansota:
  - Itseoppineet tilastotieteilijät ratkoivat uusia ongelmia
    - **Telekommunikaatio**
      - Edward Molina & Bell telephone system:  
*"Methods for utilizing both statistical and nonstatistical types of evidence were needed"*.  
Puhelinverkon kuormituksen ja kapasiteetin arviointi.  
Molinan innostus Bayes-Laplace todennäköisyyteen ei levinnyt muihin yhtiöihin. AT&T säilytti Molinan kirjoituksia salaisuuksina, jotka vasta myöhemmin julkaistiin talon sisäisissä julkaisuissa.



# Frekvenssin aika

- **Teollisuustyöntekijöiden tapaturmat**

- Turvamääräyksiä ei ollut.
- Teollisuudessa 1/318 työntekijästä kuoli 1890-1910.
- → Työnantajien vakuutusongelma, miten määritellä riski?
  
- **Dataa liian vähän, liian harvoista ammateista!**
- Saksassa onnettomuustilastoja jo 30 vuoden ajalta, mutta ei USA:ssa.
- Massachusettsin kenkätehtaiden data ei sovellu Nevadan kaivosteollisuuden riskien arviointiin.
- Isaac Rubinow: **"every scrap of information must be used!"**



# Frekvenssin aika

- **Teollisuustyöntekijöiden tapaturmat**

- **Albert Whitney:**
- vakuutusmatematiikan spesialisti.
- Yksinkertaisti rajusti Bayesin kaavan soveltamista käytännön tarpeisiin.
- Yksinkertaistettu versio sai nimen "credibility".
- Seuraavat 30 vuotta USAn vakuutuslaskelmat käyttivät sitä.
  
- *"Credibility theory was a practical American response to a uniquely American problem"*

# Frekvenssin aika



- **Englanti:**

- Karl Pearson, Ronald Fisher: tilastotieteen frekventistinen perusta
    - Biologian ja perinnöllisyyden tutkimus
    - Frekvenssiaineistoja
  - Pearson: *"the practical man will accept the results of inverse probability of the Bayes-Laplace brand till better are forthcoming"*
- Suhtautuminen Bayesiin alkaa jyrkentyä

# Frekvenssin aika



- **Englanti:**

- Aivan aluksi, myös Fisher (kuten Pearson) käytti Bayesin kaavaa, mutta suuntautui sitten muuhun:
  - Kokeiden satunnaistamiseen (randomization)
  - Otantateoriaan (sampling theory)
  - Merkitsevyystesteihin (test of significance)
  - Suurimman uskottavuuden menetelmiin (max likelihood).
  - Varianssianalyysiin (ANOVA)
  - Kokeiden suunnitteluun (design of experiments)

# Frekvenssin aika



- **Englanti:**

- **Statistical Methods for Research Workers.** Fisher 1925.
  - Keittokirja menetelmistä ei-tilastotieteilijöille.
  - Seitsemän painosta.
  - Frekvenssi = de facto menetelmä.
- Kokeellista tutkimusta perinnöllisyydestä. Toisin kuin Bayes, Price ja Laplace, *Fisher ei tarvinnut täydentävää informaatiota* frekvenssiaineistolle.

# Frekvenssin aika



- **Englanti:**

- Fisherin kokeissa vain rajoitetusti epävarmuuksia, ei puuttuvia dataja. Kokeet toistettavissa, verrattavissa ja manipuloitavissa.
- Fisher Bayesin kaavasta:
  - **"Impenetrable jungle"**
  - **"A mistake, perhaps the only mistake to which the mathematical world has so deeply committed itself"**
  - **"Staggering falsity" (of equal priors)**
  - **"The theory of inverse probability is founded upon an error, and must be wholly rejected".**

# Frekvenssin aika



- **Englanti:**

- Karl Pearsonin poika Egon Pearson ja puolalainen Jerzy Neyman 1933: Neyman-Pearson teoria hypoteesien testaamisesta.
  - Type I & type II errors.
- Fisher, E Pearson, Neyman:
  - **Data oli ainoa ja riittävä tiedon lähde.**
  - **Kokeet tuottivat toistettavia tuloksia, frekvenssejä.**
  - **"Subjective priors banned".** Mutta ok, jos 'oikea' prioritunnettiin (=frekvenssi).





# Frekvenssin aika

- **Englanti:**

- Neyman: "decision oriented", Fisher: "inference oriented"
  - Eri tyyppiset sovellusongelmat ja kysymykset.
- Pearsonin oppilas George Box: suuntautui Bayesmenetelmien kehittäjäksi.
- *What's the collective noun for a group of statisticians? A quarrel!*

# Bayesin hidas tuleminen

- **Ranska & Englanti:**

- 1924 Émile Borel Ranskassa päätteli että subjektiivisen todennäköisyyden voi määrittää vedonlyönnin perusteella.
  - *Oletuksena rationaalinen henkilö*
- 1926 Frank P Ramsay päätteli samoin Englannissa.  
→ ”epävarmuutta on kuvattava (Bayes-) todennäköisyytenä”.

# Bayesin hidas tuleminen



- **Italiassa:**

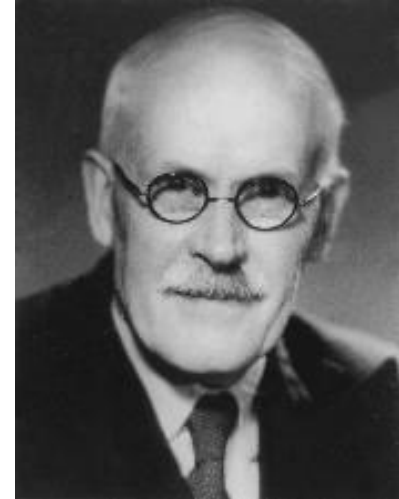
- 1937, Bruno de Finetti: *"Bayes' subjectivity on a firm mathematical foundation"*
  - Representation theorem.
  - Exchangeability  $\rightarrow$  "as if" prior. (välttämätön seuraus).



# Bayesin hidas tuleminen

- **Harold Jeffreys:**

- Lähes ainoa Bayes-tutkija 1930-1940.
  - Geologi: maanjäristykset, tsunamit, vuorovesi-ilmiöt.
- Cambridgen opiskelijat: *"We have the world's two greatest statisticians, although one is a professor of astronomy, and the other a professor of genetics"*. 😊
- *"On most things we should agree and when we disagree, we would both be doubtful"*.



# Bayesin hidas tuleminen

- **Jeffreysin sovelluksia:**
  - Maanjäristyksen aiheuttamien tärinä-aaltojen mittauksista voidaan päätellä järistyksen keskus  
→ Klassinen käänteinen ongelma → Bayes !
  - *"Perhaps in no other field were as many remarkable inferences drawn from so ambiguous and indirect data".*
- **Jeffreysin priori**
  - 'Objektiivinen' tapa valita priori.

# Bayesin hidas tuleminen

- **Jeffreys:**

- "(Fisher's) p-values fundamentally distorted science".
- "Why should possible outcomes that had not occurred make anyone reject a hypothesis?"
- Wanted: **probability of hypothesis**
  - Nojaten siihen dataan joka on.

# Bayesin hidas tuleminen

- **Jeffreys:**

- Kirja: "Theory of probability"
- Fisherin "keittokirja" soveltajille jäi suosituimmaksi.
- Bayes johtaa edelleen hankalampiin laskuihin käytännössä.

- **Jeffreys & de Finetti:**

- **Objective Bayes vs subjective Bayes !**

# Bayesin hidas tuleminen

- **Toinen maailmansota:**
  - Salakoodien purku, Enigma
    - Päättelyä puutteellisen datan ehdoilla → Bayes.
    - Mutta: "probability experts were scarce".
- Jeffreys sivuutettiin: 'maanjäritykset eivät liity sotatutkimukseen', Fisher koettiin poliittisesti epäluotettavaksi, Neyman liian teoreettiseksi. Tarvittiin: "***quick and dirty solutions***"
- Turing: opiskeli puhdasta matematiikkaa (ei tilastotiedettä), eikä siksi tiennyt että Bayes-kaava on 'epätieteellinen'.



# Bayesin hidas tuleminen

- **Sukellusveneiden viestien salakoodaus:**
  - Aivan liian monta mahdollista yhdistelmää.
    - Mahdotonta kokeilla kaikkia.
    - Jotkut yhdistelmät ovat todennäköisempiä.
    - Johtolankoja hajanaisista lähteistä → tietoa kertyy koko ajan lisää → arvio päivittyy uudella tiedolla → Bayes.
    - Esim. sana "ein" esiintyi 90%:ssa Enigma-viesteissä. Tämä voitiin koodata (vain) 17000 eri tavalla.
    - Informaation mitta "ban" → "bit" (bitti).
      - Automaattinen tietojenkäsittely.

# Bayesin hidas tuleminen

- **Sukellusveneiden paikantaminen ym. operaatiot → operations research, OR.**
  - Jokainen uusi havainto muuttaa arviota todennäköisestä sijainnista.
  - USA: Koopmanin Bayesläinen keittokirja laivastolle: optimaalinen tapa etsiä sukellusvenettä.
- **Sodan jälkeen tutkimukset luokiteltiin salaisiksi → Bayes jälleen pimentoon.**

# Bayesin hidas tuleminen

- Tutkijoille suunnattu käytännöllinen julkaisu Bayes-menetelmistä ilmestyy vasta 1963.
- RAND: kysymys vierailevalle tilastotieteilijälle: miten arvioida todennäköisyys että sota syttyy seuraavan viiden vuoden ajalla?
  - "Oh, that question just doesn't make sense. Probability applies to a long sequence of repeatable events, and this is clearly a unique situation. The probability is either 0 or 1, but we won't know for five years".
    - "I was afraid you were going to say that. I have spoken to several other statisticians and they all told me the same thing".

# Bayes sodan jälkeen

- Savage, Lindley: Tilastotieteen aksiomaattisen perustan luominen
- tämä johtaa Bayesiin 'kuin vahingossa'.

# Bayes sodan jälkeen

- Ongelma: jos priorit ovat erilaiset, myös posteriori on erilainen. Objektiivisuus?
- Savage:
  - "When they have little data, scientists disagree and are subjectivists; when they have piles of data, they agree and become objectivists".
- Lindley agreed:
  - "That's the way science is done".

# Bayes sodan jälkeen

- **Mutta:** posterioritodennäköisyyksiä oli yhä liian vaikea laskea.
  - Kehitettiin likimääräisiä menetelmiä.
  - Esimerkit olivat usein liian keinotekoisia, ollakseen kiinnostavia.
  - Lindley: "*Bayesian statistics is not a branch of statistics, it is a way of looking at the whole of statistics*".
- Bayes = epävarmuuden tiede: teoreettinen perusta luotu, mutta miten sitä sovelletaan?

# Muurit murtuvat: MCMC

- **Hierarchical Models** (Lindley and Smith, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1972) and **Markov chain Monte Carlo** (Gelfand and Smith, *Journal of the American Statistical Society*, 1990).
- **1990-luku: MCMC ja WinBUGS**
  - Käytännön laskenta helpottuu.
  - Mahdollista laatia suurempia ja realistisempia malleja.
  - Esimerkkejä monilta sovellusalueilta.
  - Vihdoin toimiva laskentaväline Bayes-menetelmien soveltamisessa.

# Paradigmojen nokittelua

- Kaiken takana todennäköisyyden tulkinta: frekvenssi vai epävarmuuden mitta?
- Miten todennäköisyys tulkitaan tilastotieteessä?
  - Jos frekvenssi
    - Frekventistinen päättely ?
  - Jos epävarmuuden mitta
    - Probabilistinen päättely ?



# Paradigmojen nokittelua

- Kaikki tämä heijastuu odotukseen siitä mitä esim. luottamusvälin tai todennäköisyysvälin pitäisi (jonkun mielestä) kertoa.
  - Bayesin Credible Interval ( $CI_B$ ) ei tarjoa samaa frekvenssitulkintaa kuin frekventistinen Confidence Interval ( $CI_F$ ). Eikä  $CI_F$  tarjoa samaa todennäköisyystulkintaa kuin  $CI_B$ . Numeerisesti voivat olla samat (yleensä ei), mutta tulkinta on aina eri.

# Paradigmojen nokittelua

- Jos ”oikea” todennäköisyys tarkoittaa havaintojen frekvenssiä, niin se liittyy todelliseen tai kuviteltuun äärettömän pitkään toistokokeeseen
  - tapahtumien A osuus näissä toistoissa.
  - kaikki todennäköisyydet lasketaan tämän (hypoteettisen) jakauman suhteen.
  - tuntemattomat parametrit ovat vakioita, joihin ei liity todennäköisyyttä, jollei kuvitella niitä jonkin ylemmän toistokokeen satunnaisiksi tuloksiksi. (Kaksi peräkkäistä otantajakaumaa, esim. cluster sampling).

# Paradigmojen nokittelua

→”Bayes *added* a distribution for a parameter, a distribution that was not part of the binomial example under consideration and then used that distribution for probability analysis”

Fraser: Is Bayes Posterior just Quick and Dirty Confidence. *Statistical Science* 2011, Vol 26, no 3, 299-316.

Onko tämä perisynti vai ratkaiseva etu?

*(Joku voisi sanoa: Frequentists have also added **other** arbitrary things...)*

**Bayesian inference** (probabilistic inference)

vs **statistical inference**?

# Paradigmojen nokittelua

Toisin sanoen: kumpi on ratkaisumme avain?

$P(X | \theta)$  vai  $P(\theta | X)$  ?

**“Thus conditioning on the data we have, rather than the data we might have had makes eminently more sense to me”.**

**S.E. Fienberg. *Statistical Science*, 2011, Vol 26, no 2, 238-239.**

Mutta mikäli toistuvia ennusteita samasta asiasta, olisi mallin suotavaa olla frekventistisesti useammin oikeassa kuin väärässä. Päivittämisen pitäisi johtaa parempiin ennusteisiin.

# Bayesian methods in health technology assessment: a review

Spiegelhalter, Myles, Jones, Abrams. Health Technology Assessment 2000; Vol 4. No. 38.

- Key points
  - Claims of advantages and disadvantages of Bayesian methods are now largely based on pragmatic reasons rather than blanket ideological positions.
  - A Bayesian approach can lead to flexible modelling of evidence from diverse sources. (Eityisesti juuri tästä syystä esim. riskinarvioinneissa).

# Bayesian methods in health technology assessment: a review

- Key points
  - Bayesian methods are best seen as a transformation from initial to final opinion, rather than providing a single 'correct' inference.  
(Olennaista: todennäköisyydet päivittyvät aina uudella tiedolla, ts. "oppiva malli").
  - Different contexts may demand different statistical approaches, both regarding the role of prior opinion and the role of an explicit loss function.

# Bayesian thoughts

- **Dennis Lindley:**

-The main danger is that they (Bayesian methods) will be used automatically. In the application of Bayesian methods, you first need to assign some basic probabilities (and perhaps utilities) to give the problem structure; then the computer can derive other probabilities. One must *think* about the basic values and it is not usually satisfactory to use a normal density and non-informative priors.

-Ultimately, in my extreme view, all reasoning reduces to probability calculations.

