Analyysi II, korvaava 1. kurssikoe to 22.3.2012
Ratkaisut (2 s.): Jouni Luukkainen (arvostelu valmistui ti 27.3.2012)
Tämä tiedote on ilmoitustaululla ja kurssin kotisivulla.

Teht. 1. *Laske integraali* $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$.

Ratk. Kahdella eri tavalla:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{5}{2}\frac{1}{x(x+1)}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+x| - \frac{5}{2}(\ln|x| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}(\ln|x| + \ln|x+1|) - \frac{5}{2}(\ln|x| - \ln|x+1|) + C \\ &= 3\ln|x+1| - 2\ln|x| + C, \quad \text{tai}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx &= \int \left(\frac{x}{x(x+1)} - \frac{2}{x(x+1)}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\right) dx = \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}\right) dx \\ &= 3\ln|x+1| - 2\ln|x| + C.\end{aligned}$$

Teht. 2. *Laske integraali* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Ratk. Osittaisintegroimalla kahdesti saadaan muodostettua yhtälö laskettavalle integraalille. Tehdään tämä integroimalla aina eksponenttitekijä:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx &= \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx = \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin 3x\,dx \\ &= \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx \\ &= \Big/_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x\right) - \frac{9}{4}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx.\end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaistuksi

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{3}{4}(-1)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 0\right)}{1 + \frac{9}{4}} = -\frac{\frac{3}{4}e^{\pi} + \frac{1}{2}}{\frac{13}{4}} = -\frac{3e^{\pi}+2}{13}.$$

Vaihtoehtoisesti osittaisintegroinneissa voidaan integroida aina trigonometrinen tekijä:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx &= \Big/_{0}^{\pi/2} e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}\frac{1}{3}\sin 3x\,dx = \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin 3x\,dx \\ &= \Big/_{0}^{\pi/2} \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(\Big/_{0}^{\pi/2} e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int_0^{\pi/2} 2e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) dx\right) \\ &= \Big/_{0}^{\pi/2} e^{2x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x\right) - \frac{4}{9}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx.\end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaistuksi

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{\pi}\left(\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{9}\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{9}\cdot 1\right)}{1 + \frac{4}{9}} = -\frac{\frac{1}{3}e^{\pi} + \frac{2}{9}}{\frac{13}{9}} = -\frac{3e^{\pi}+2}{13}.$$

Integroimalla joko ensin eksponenttitekijä ja sitten trigonometrinen tekijä tai ensin trigonometrinen tekijä ja sitten eksponenttitekijä päästään vain lähtöintegraaliin, jolloin sille ei saada sen laskemiseen tarvittavaa yhtälöä.

Teht. 3. *Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali* $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$.

Ratk. Funktio $x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{x^2}$ on jatkuva välillä $[\pi, \infty[$, ja

$$0 = \frac{0}{x^2} = \frac{1-1}{x^2} \le \frac{1+\sin x}{x^2} \le \frac{1+1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \quad \text{kaikilla } x \ge \pi.$$

Tiedetään, että koska $2 > 1$, niin integraali $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ suppenee, joten myös integraali $\int_\pi^\infty (2/x^2)\,dx$ suppenee. Näin ollen majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava integraali $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}\,dx$ suppenee.

Vaihtoehtoisesti voidaan todeta, että koska

$$\left|\frac{1+\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1+|\sin x|}{x^2} \le \frac{1+1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \quad \text{kaikilla } x \ge \pi,$$

niin majoranttiperiaatteen nojalla tutkittava integraali suppenee itseisesti ja siten myös varsinaisestikin.

Teht. 4. *Olkoon* $f, g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ *ja* $g(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$. *Olkoon* $D = [-\pi, 0, \frac{1}{3}\pi, \pi]$ *välin* $[-\pi,\pi]$ *jako.*

(a) *Laske funktion* g *jakoon* D *liittyvät alasumma* $s_D(g)$ *ja yläsumma* $S_D(g)$.

(b) *Määritä kohdan* (a) *tuloksen perusteella sellaiset luvut* a *ja* b, *että* $b > a > 2\pi$ *ja funktion* f *kuvaajan pituudelle on voimassa* $a \le \ell(f) \le b$.

Ratk. (a) Ensiksikin $f'(x) = \cos x$ kaikilla $x \in [-\pi,\pi]$ ja siis $g(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ kaikilla $x \in [-\pi,\pi]$. Jakovälien $\Delta_1 = [-\pi, 0]$, $\Delta_2 = [0, \frac{1}{3}\pi]$ ja $\Delta_3 = [\frac{1}{3}\pi, \pi]$ pituudet ovat $\ell(\Delta_1) = \pi$, $\ell(\Delta_2) = \frac{1}{3}\pi$ ja $\ell(\Delta_3) = \frac{2}{3}\pi$. Havaitaan, että cos kasvaa välillä $[-\pi, -\pi/2]$ arvosta -1 arvoon 0 ja välillä $[-\pi/2, 0]$ arvosta 0 arvoon 1 ja että cos vähenee välillä $[0, \pi/2]$ arvosta 1 arvoon 0 ja välillä $[\pi/2, \pi]$ arvosta 0 arvoon -1. Täten g vähenee välillä $[-\pi, -\pi/2]$ arvosta $\sqrt{2}$ arvoon 1, kasvaa välillä $[-\pi/2, 0]$ arvosta 1 arvoon $\sqrt{2}$, vähenee välillä $[0, \pi/3]$ arvosta $\sqrt{2}$ arvoon $\sqrt{1+(1/2)^2} = \sqrt{5}/2$ ja välillä $[\pi/3, \pi/2]$ arvosta $\sqrt{5}/2$ arvoon 1 sekä kasvaa välillä $[\pi/2, \pi]$ arvosta 1 arvoon $\sqrt{2}$.

Olkoon $G_i = \sup g\Delta_i = \max g\Delta_i$ ja $g_i = \inf g\Delta_i = \min g\Delta_i$, kun $i = 1, 2, 3$. Tällöin

$$G_1 = G_2 = G_3 = \sqrt{2}, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad g_3 = 1.$$

Siis

$$S_D(g) = \sum_{i=1}^{3} G_i \ell(\Delta_i) = \sqrt{2}\ell([-\pi,\pi]) = \sqrt{2}\cdot 2\pi = 2\sqrt{2}\pi$$

ja

$$s_D(g) = \sum_{i=1}^{3} g_i \ell(\Delta_i) = 1\cdot\pi + \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{3}\pi + 1\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi(6+\sqrt{5}+4) = \frac{1}{6}\pi(10+\sqrt{5}).$$

(b) Funktio f on jatkuvasti derivoituva, joten sen kuvaajalla on pituus $\ell(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$. Tiedetään, että $s_D(g) \le \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \le S_D(g)$. Valitaan siis $a = s_D(g) = \frac{1}{6}\pi(10+\sqrt{5})$ ja $b = S_D(g) = 2\sqrt{2}\pi$. Tällöin $b > a$ ja $a > \frac{1}{6}\pi(10+2) = \frac{1}{6}\pi\cdot 12 = 2\pi$ sekä $a \le \ell(f) \le b$.