Analyysi II, 1. kurssikoe to 1.3.2012
Ratkaisut ja arvostelukommentit (3 s.): Jouni Luukkainen (arvostelu valmistui ma 19.3.2012)
Tämä tiedote on ilmoitustaululla ja kurssin kotisivulla.

Tehtävä 1. *Laske integraali* $\int x\sin(2x^2)\,dx$ *sijoituksella* $u = 2x^2$.

I, parempi ratkaisutapa. (Tämän ratkaisutavan oli ainakin aloittanut vain 25 %.) Sijoittamalla $u(x) = 2x^2$ ja $du = u'(x)\,dx = 4x\,dx$ eli $x\,dx = \frac{1}{4}du$, integroimalla ja tekemällä takaisinsijoitus saadaan

$$\int x\sin(2x^2)\,dx = \int \frac{1}{4}\sin(2x^2)4x\,dx = \int \frac{1}{4}\sin u\,du = -\frac{1}{4}\cos u + C = \underline{-\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Arvostelu. Integroimisvakion ja takaisinsijoituksen unohtaminen veivät kumpikin 1p. *Sijoituksesta* $dx = \dfrac{du}{4x}$: Tällöin tuli rajoitus $x \neq 0$, joten piti osoittaa, että kullakin C saatu lauseke on vaadittu integraalifunktio myös pisteessä $x = 0$; siis joko derivoimalla (koko $\mathbb{R}$:ssä) tai huomaamalla, että tiedetään etukäteen, että integraalifunktio on olemassa koko $\mathbb{R}$:ssä, jolloin sen jatkuvuuden tähden sillä on oltava sama jatkuva lauseke myös pisteessä $x = 0$. Osoituksen ohittaminen vei 1p.

II, huonompi ratkaisutapa. (Tämän ratkaisutavan oli ainakin aloittanut 71 %.) Ratkaistaan ja sijoitetaan $x = \pm\sqrt{u/2}$ (tai $x = \sqrt{u/2}$, kun $x \geq 0$), jolloin saadaan $dx = x'(u)\,du = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\,du = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u}}\,du$, kun $x \neq 0$ (tai $dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u}}\,du$, kun $x > 0$) ja siis

$$\int x\sin(2x^2)\,dx = \int \left(\pm\sqrt{\frac{u}{2}}\right)\sin u\left(\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u}}\right)du = \int \frac{1}{4}\sin u\,du \text{ (jatko kuten yllä).}$$

Etumerkit $\pm$ siis kumosivat toisensa. Tulos on nyt ehdottomasti tarkastettava rajoituksen $x \neq 0$ (tai $x > 0$) tähden (rajoituksen $x > 0$ tapauksessa derivoimalla koko $\mathbb{R}$:ssä). Tarkastuksen ohittaminen vei 1p (vain kaksi oli tarkastukseksi derivoinut, mutta eivät hekään olleet huomanneet, miksi siihen oli erityinen tarve). Sisäfunktion $u \mapsto u/2$ derivaatan $1/2$ huomaamatta jääminen vei 1p.

Tehtävä 2. *Laske funktion* $f\colon [1,e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{x^2}{2}\right)$, *kuvaajan pituus.*

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen. Funktio f on jatkuvasti derivoituva, joten sen kuvaajalla on pituus

$$\begin{aligned}
\ell(f) &= \int_1^e \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \text{ (1p)} = \int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\right)^2}\,dx \text{ (2p)} = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}}\,dx \\
&= \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}}\,dx \text{ (3p)} = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)\right)^2}\,dx = \int_1^e \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)\right|dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)dx \text{ (4p)} = \frac{1}{2}\Big/_1^e \left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right) \text{ (5p)} = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{e^2}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \underline{\frac{1}{4}(e^2+1)} \text{ (6p).}
\end{aligned}$$

Neliöjuuren alle oli saatava oikean lausekkeen neliö ja siten neliöjuuri oikealla tavalla eliminoitua, jotta itse integroinneista olisi voinut saada pisteitä.

Tehtävä 3. *Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali* $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$.

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen. Integroitava $x \mapsto \dfrac{2+\cos x}{x}$ on jatkuva välillä $[\pi, \infty[$, ja

$$\frac{2+\cos x}{x} \geq \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x} \geq 0, \quad \text{kun } x \geq \pi \ \ \text{(2p)}.$$

Tiedetään, että integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ hajaantuu (toisin sanoen, $= \infty$), joten myös integraali $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{1}{x}\,dx$ hajaantuu ($= \infty$) (4p). Täten minoranttiperiaatteen nojalla tutkittava integraali $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$ <u>hajaantuu</u> ($= \infty$) (6p).

Arvostelusta. Minorantista tarvittiin toteamus, että $1/x \geq 0$ kaikilla $x \geq \pi$, jotta integraalin $\int_\pi^\infty (1/x)\,dx$ hajaantumisesta olisi pääteltävissä tarvittava ehto, että $\int_\pi^\infty (1/x)\,dx = \infty$, minkä esittäminen toisaalta riitti. Muuten meni 1p. Luentojen tulos oli, että integraali $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ hajaantuu, mihin piti huomauttaa, että täten myös integraali $\int_\pi^\infty (1/x)\,dx$ hajaantuu; tämä oli 1p arvoinen päättely. Toki tämän tuloksen sai todistaa suoraankin: $\int_\pi^b (1/x)\,dx = \ln(b/\pi) \to \infty$, kun $b \to \infty$.

Minorantit $x \mapsto \cos x/x$ (vaihtuvamerkkinen) ja $x \mapsto -1/x$ (negatiivinen) eivät kelvanneet, sillä voidaan osoittaa, että integraali $\int_\pi^\infty (\cos x/x)\,dx$ suppenee, ja toisaalta integraali $\int_\pi^\infty (-1/x)\,dx$ kyllä hajaantuu, mutta $\int_\pi^\infty (-1/x)\,dx = -\infty$.

Majoranttiperiaate oli siis tässä tehtävässä hyödytön.

Tarvittiin siis epäyhtälö yksinkertaistamaan integroitavan muoto luennoissa käsitellyksi. Ne, jotka yrittivät pärjätä pelkillä yhtälöillä, saattoivat tutkia summaa $\int_\pi^\infty ((2+\cos x)/x)\,dx = \int_\pi^\infty (2/x)\,dx + \int_\pi^\infty (\cos x/x)\,dx$ ja huomata, että oikean puolen ensimmäinen integraali on $= \infty$, mutta tällöin olisi pitänyt myös osoittaa, mitä kukaan ei ollut osannut (ja mikä olisikin taas vaatinut epäyhtälöitä juuri oikeanlaisen osittaisintegroinnin jälkeen), että oikean puolen toinen integraali suppenee, jotta summaesitys ja vasemman puolen integraali olisivat määritellyt laajennettuina reaalilukuina ($\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; huomaa, että vastaavia raja-arvolauseita ajatellen $\infty + a = \infty$ on määritelty kaikilla $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mutta $\infty + (-\infty)$ ei ole).

Oli osattava käyttää minoranttiperiaatetta, jotta saattoi saada enemmän kun 2p. Mutta määritelmästä $\int_\pi^\infty = \lim_{b\to\infty} \int_\pi^b$ sai 1p, samoin tuloksesta $\int_\pi^\infty (a/x)\,dx = \infty$, olipa ratkaisussa sitten $a = 1$, 2 tai 3 (tapaus $a = -1$ vastaavasti).

Tehtävä 4. *Olkoon* $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, *ja tarkastellaan välin* $[-2,2]$ *jakoa* $D = \{-2, 0, 1, 2\}$.

(a) *Tutki, mitä arvoja funktion* f *jakoon* D *liittyvä Riemannin summa* $S_D(f,\xi)$ *voi saada.*

(b) *Miksi kohdan* (a) *tuloksen perusteella on* $\int_{-2}^2 f(x)\,dx < 0$?

Ratkaisu ja pisteiden kertyminen.

(a) (4p) Rajoittuma $f|[-2,0]$ on vähenevä sekä rajoittumat $f|[0,1]$ ja $f|[1,2]$ kasvavia. Jos jono $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ on *valinta* jaosta D, toisin sanoen, jos $\xi_1 \in [-2,0]$, $\xi_2 \in [0,1]$ ja $\xi_3 \in [1,2]$ ovat pisteitä jakoväleistä, niin Riemannin summalle $S_D(f,\xi) = f(\xi_1)(0-(-2)) + f(\xi_2)(1-0) + f(\xi_3)(2-1) = 2f(\xi_1) + f(\xi_2) + f(\xi_3)$ saadaan arviot

$$\begin{aligned} S_D(f,\xi) &\leq S_D(f,(-2,1,2)) = 2f(-2) + f(1) + f(2) = 2\cdot 0 + (-3) + 0 = -3 \quad \text{ja} \\ S_D(f,\xi) &\geq S_D(f,(0,0,1)) = 2f(0) + f(0) + f(1) = 2(-4) + (-4) + (-3) = -15, \end{aligned}$$

joten $\underline{-15 = s_D(f) \leq S_D(f,\xi) \leq S_D(f) = -3}$. Nyt alasumma $s_D(f) = \inf\{S_D(f,\xi) \mid \xi \text{ valinta } D\text{:stä}\}$ ja yläsumma $S_D(f) = \sup\{S_D(f,\xi) \mid \xi \text{ valinta } D\text{:stä}\}$ olivat itsekin Riemannin summia.

Huom. Osoitetaan, mitä ei vaadittu eikä oikeastaan pyydettykään, että kääntäen jokainen luku välillä $[-15,-3]$ on Riemannin summa $S_D(f,\xi)$ jollakin D:n valinnalla ξ. Kullakin $t \in [0,1]$ määritellään D:n valinta $\xi(t) = (-2t, t, 1+t)$. Tällöin funktio $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = S_D(f,\xi(t)) = 2f(-2t) + f(t) + f(1+t)$, on f:n jatkuvuuden nojalla jatkuva, ja $\varphi(0) = S_D(f,(0,0,1)) = -15$ sekä $\varphi(1) = S_D(f,(-2,1,2)) = -3$, joten Bolzanon lauseen nojalla jokaista lukua $s \in [-15,-3]$ kohti on olemassa $t \in [0,1]$, jolla $s = \varphi(t) = S_D(f,\xi(t))$. Muutama oli tämän väitteen perustellut, mutta he eivät saaneet siitä mitään hyvitystä, kuten eivät tarvinneetkaan.

Arvostelusta. Pelkkä esimerkki tai esimerkit Riemannin summista, kuten valintoja $\xi = (-2, 0, 1)$ (jakovälien vasemmat päätepisteet), $\xi = (0, 1, 2)$ (oikeat päätepisteet) tai $\xi = (-1, 1/2, 3/2)$ (keskipisteet) vastaavat, tuottivat vain 1p. Tarvittiin yläraja -3 ja alaraja -15. Käytännössä riitti määrittää yläsumma ja alasumma (3p, jos molemmat; 2p, jos vain toinen). Kaikkien jakovälien pitämistä yhtä pitkinä (1 tai 2) vei 1p, samoin jos käytti väärää, tasavälistä jakoa $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Hankaluutena funktiossa f oli, että se oli ei-positiivinen ja ei-monotoninen.

(b) (2p) Funktio f on jatkuva, joten se on integroituva, ja (a)-kohdan tuloksen nojalla on

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \leq S_D(f) = -3 < 0.$$

Arvostelusta. Integraalin olemassaoloa ei tarvinnut perustella. Yläsummasta riitti tarkan arvon sijasta jakoon D liittyvien Riemannin summien ylärajasta -3 saatava arvio $S_D(f) \leq -3$. Perusteluksi tarjottu selitys, että kaikki jakoon D liittyvät Riemannin summat ovat negatiivisia, ei tuottanut pisteitä, sillä esimerkiksi integroituvan funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x-1$, kun $x < 1$, ja $f(1) = -1$, jokainen jakoon $D = \{0, 1\}$ liittyvä Riemannin summa on negatiivinen, mutta $S_D(f) = 0$. Toki jatkuvalle funktiolle yläsumma on aina myös Riemannin summa, mutta tämä olisi pitänyt todeta. Samoin lisäperustelu, että $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = S_D(f, \xi)$ jollain valinnalla ξ, ei tuottanut pisteitä, koska sitä ei ollut osoittu; tehtävän tapauksessa tämä kyllä seuraisi siitä, että $-15 = s_D(f) \leq \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \leq S_D(f) = -3$ ja että jokainen luku välillä $[-15, -3]$ on jokin jakoon D liittyvä Riemannin summa (a)-kohdassa esitetyn huomautuksen nojalla.