Algebra I

Luento 31.1.2012

Helsingin yliopisto

Tiedotuksia

- Korjausten tekemiseen on tästä lähin enemmän aikaa, ja korjauksia saa palauttaa useita kertoja.

- Korjausten palautuspäivä on nyt vanhaa palautuspäivää seuraavan viikon keskiviikko.

- Pajassa on välillä ollut ruuhkaa. Asia pyritään korjaamaan.

- Kannattaa myös itse suosia ruuhkattomia aikoja, jos pystyy.

Aliryhmän määritelmä

Oletetaan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä ja $H \subset G$. Pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä, jos

(H1) joukko H on suljettu laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.

(H2) ryhmän G neutraalialkio on joukossa H.

(H3) joukko H sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.

Tällöin merkitään $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ tai lyhyemmin $H \leq G$

Esimerkki aliryhmästä

- Ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ on aliryhmä $3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Esimerkki aliryhmästä

- Rubikin kuution yhden tahkon kierrot muodostavat Rubikin ryhmän aliryhmän.

Korttipakan sekoittaminen

Korttipakan sekoitusta voi ajatella kuvauksena:

$$\begin{array}{cccc} \heartsuit & \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit \end{array}$$

Korttipakan sekoittaminen

- On helpompaa, jos kortteja merkitään numeroilla 1, 2, 3, 4.

- Tällöin saadaan kuvaus

$$\sigma\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\},$$
$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4, \quad \sigma(4) = 2.$$

Permutaatio

- Joukon A permutaatio on bijektiivinen kuvaus joukolta A itselleen.

Permutaation taulukkomuoto

- Permutaatio $\sigma\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ taulukkomuodossa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

- Ässien sekoitus taulukkomuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Symmetrinen ryhmä

- Ryhmä $(S_A, \circ)$ on joukon A kaikkien permutaatioiden muodostama ryhmä. Laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.

- Jos $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, merkitään $S_A = S_n$.

- Tulot lasketaan oikealta vasemmalle!

Permutaatioiden tulo

- Lasketaan permutaatioiden

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

  tulo.

- Permutaatioiden tulo ei ole vaihdannainen laskutoimitus.

Permutaation radat

- Kun permutaatiosta piirtää kuvan, huomaa, että se muodostuu radoista.

- Määritetään permutaation
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
radat.