Algebra I

Luento 28.3.2012
Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Kokonaisalue
- Normaali aliryhmä
- Sivuluokkien laskutoimitus

Kunta

Rengas $R \neq \{0\}$ on kunta, jos se on vaihdannainen ja kaikki nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä.

Alikunta

Kunnan K osajoukko L on alikunta, jos

- $(L, +) \leq (K, +)$

- $(L \setminus \{0\}, \cdot) \leq (K \setminus \{0\}, \cdot)$

Kokonaisalue

Olkoon $R \neq \{0\}$ vaihdannainen rengas.

Oletetaan, että kaikilla $a, b \in R$ ehdosta $ab = 0_R$ seuraa $a = 0_R$ tai $b = 0_R$.

Tällöin R on kokonaisalue.

Esimerkki: $\mathbb{Z}_6$

Esimerkki: $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	0	0	0	0	0
[1]	0	1	2	3	4
[2]	0	2	4	1	3
[3]	0	3	1	4	2
[4]	0	4	3	2	1

Lause

Jokainen kunta on kokonaisalue.

Karakteristika

Kokonaisalueen D karakteristika on pienin positiivinen kokonaisluku p, jolle pätee $p \cdot 1_D = 0_D$.

Jos tällaista lukua ei ole olemassa, karakteristikan sanotaan olevan nolla.

SIVULUOKKIEN LASKUTOIMITUS

- Jäännösluokille voidaan määritellä laskutoimitus.

- Sivuluokat ovat jäännösluokkien yleistys. Voisiko niillekin määritellä laskutoimituksen?

Sivuluokkien laskutoimitus

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä.

Haluamme määritellä joukossa G/H laskutoimituksen $\odot$ ehdolla

$$xH \odot yH = xyH \quad \text{kaikilla } x, y \in G.$$

Sivuluokkien laskutoimitus

Ryhmällä S_3 on aliryhmä $B = \{(1), (12)\}$.

Yritetään määritellä sivuluokkien joukossa laskutoimitus ehdolla

$$\sigma B \odot \tau B = \sigma\tau B \quad \text{kaikilla } \sigma, \tau \in S_3.$$

Sivuluokkien laskutoimitus

- Tuloksena ei välttämättä ole laskutoimitus!

- Ongelmana on, että sivuluokan kirjoitusasu saattaa vaikuttaa tulokseen.

Lemma

Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Sivuluokkien laskutoimitus $\odot$ voidaan määritellä, jos $gH = Hg$ kaikilla $g \in G$.

Merkintöjä

Olkoon G ryhmä, ja olkoot $x \in G$ ja $A, B \subset G$.

Joukot xA, Ax ja AB määritellään seuraavasti:

$$xA = \{xa \mid a \in A\},$$
$$Ax = \{ax \mid a \in A\},$$
$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Määritelmä

Ryhmän G aliryhmä N on normaali, jos

$$gN = Ng \quad \text{kaikilla } g \in G.$$

Tällöin merkitään $N \trianglelefteq G$.

Esimerkki

Ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmä $n\mathbb{Z}$

Esimerkki

Ryhmän S_3 aliryhmä $B = \{(1), (12)\}$

Esimerkki

Ryhmän S_3 aliryhmä $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$