Algebra I

Luento 25.4.2012
Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Kurssikoe
- Rubikin kuution tekijäryhmä
- Tekijärenkaat ja rengashomomorfismit
- Kuinka polynomien avulla saadaan aikaan kuntia

Kurssikoe

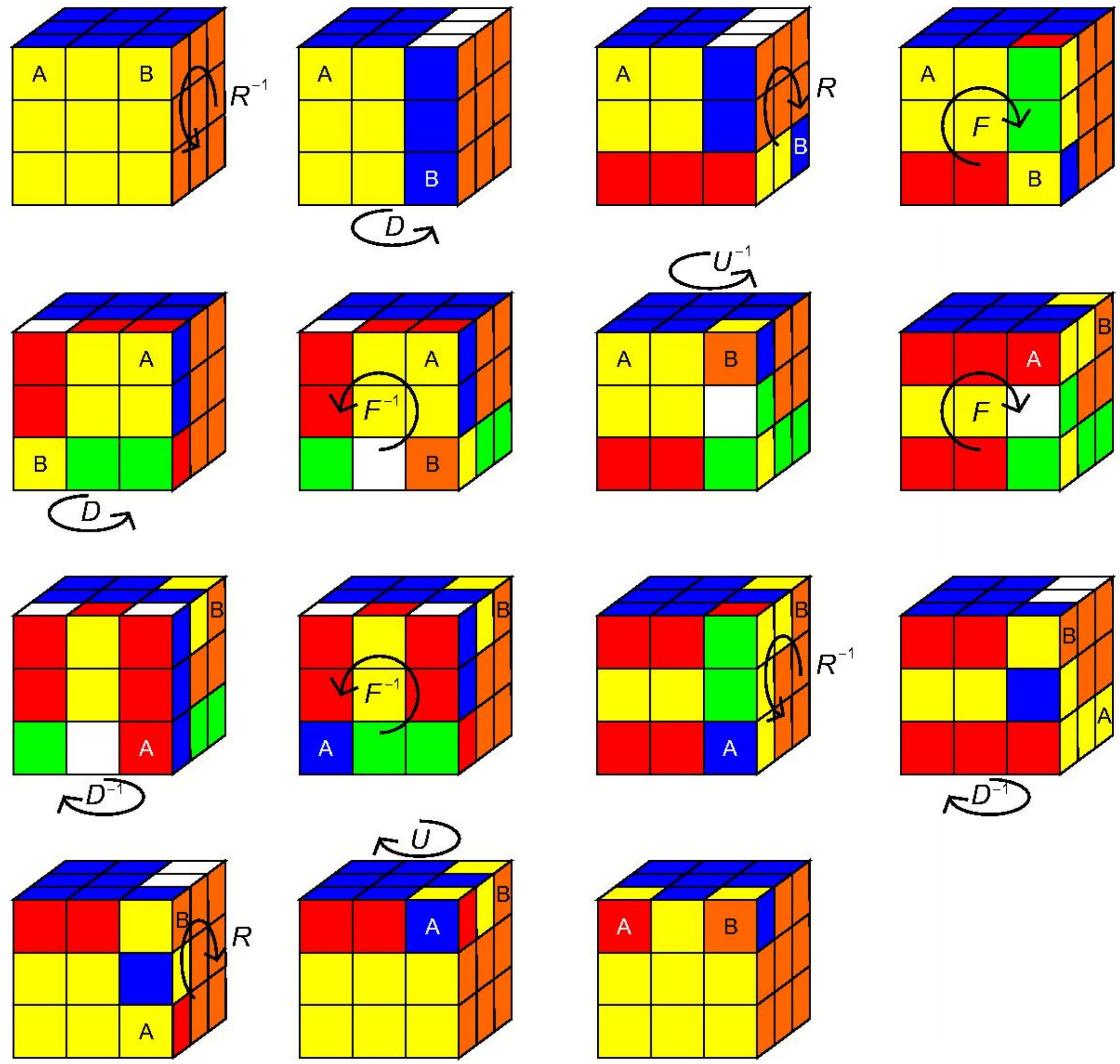
- Koe on ke 2.5. klo 12-15.
- Koekeeseen tulevat luvut 9–22.
- Tekijärenkaat, ideaalit ja rengashomomorfismit eivät kuitenkaan tule kokeeseen.
- Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

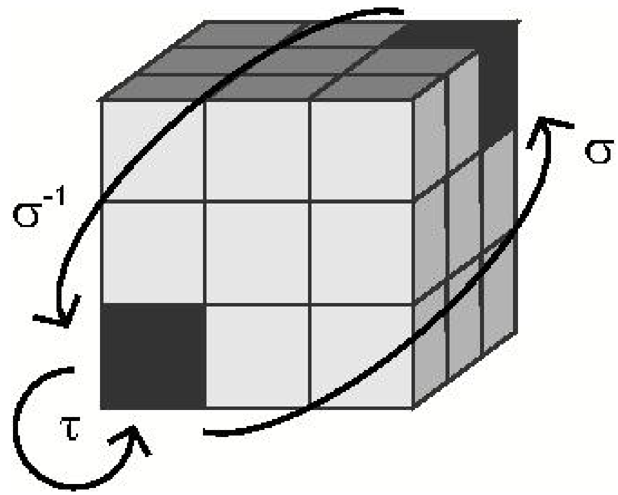
ERÄS RUBIKIN KUUTION TEKIJÄRYHMÄ

- Rubikin ryhmä R koostuu kaikista kuution siirroista.

- Asentoryhmä R_a koostuu kaikista niistä siirroista, jotka eivät siirrä palojen paikkoja.

- Asentoryhmä R_a on normaali aliryhmä.


R^{-1}
D
R
F
D
F^{-1}
U^{-1}
F
D^{-1}
F^{-1}
R^{-1}
D^{-1}
R
U


σ
σ-1
τ

Eräs Rubikin kuution tekijäryhmä

- Tekijäryhmää R/R_a kutsutaan paikkaryhmäksi.

- Paikkaryhmässä unohdetaan palojen väritarrat ja keskitytään vain siihen, minne palat liikkuvat. Sillä, miten päin palat ovat, ei ole väliä.

RENKAAT

Tekijärengas

Samalla tavalla kuin ryhmillä on tekijäryhmiä, on renkailla tekijärenkaita.

Normaaleja aliryhmiä vastaavat renkaissa niin kutsutut ideaalit.

Esimerkki

Sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ on ryhmä. Se on myös rengas, jos kertolasku määritellään ehdolla

$$(a+4\mathbb{Z})\cdot(b+4\mathbb{Z}) = ab+4\mathbb{Z}.$$

Kyseessä on renkaan eräs $\mathbb{Z}$ tekijärengas.

Esimerkki

Tutkitaan ryhmää $\mathbb{Z}_6$ ja sen aliryhmää $N = \{[0]_6, [3]_6\}$. Sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_6/N$ on ryhmä.

Se on myös rengas, jos kertolasku määritellään ehdolla

$$([a]_6 + N) \cdot ([a]_6 + N) = [a]_6[b]_6 + N.$$

Kyseessä on renkaan eräs $\mathbb{Z}_6$ tekijärengas.

Ideaali

Jotta sivuluokkien kertolaskun voi määritellä, täytyy aliryhmän olla niin kutsuttu ideaali.

Tästä voit lukea lisää kirjasta.

Rengashomomorfismi

- Ryhmien välillä on ryhmähomomorfismeja.

- Renkaiden välillä on vastaavasti rengashomomorfismeja.

Rengashomomorfismi

Olkoot R ja S renkaita. Kuvaus $f\colon R \to S$ on rengashomomorfismi, jos

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$

2. $f(ab) = f(a)f(b)$

3. $f(1_R) = 1_S$.

Kuinka polynomien avulla voidaan tuottaa kuntia?

Tutkitaan polynomirengasta $\mathbb{R}[X]$ ja sen osajoukkoa

$$I = \{(X^2 + 1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Kuinka polynomien avulla voidaan tuottaa kuntia?

Voidaan osoittaa, että tekijärengas $\mathbb{R}[X]/I$ on isomorfinen kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ kanssa.

Samaan tapaan voidaan konstruoida muitakin kuntia.

TODISTAMISESTA

Määritellään kokonaislukujen laskutoimitus $*$ ehdolla

$$x * y = -4xy \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Tämän laskutoimituksen neutraalialkio on $-1/4$.

Mikä on alkion $1/2$ käänteisalkio?

Mikä on alkion $1/2$ käänteisalkio?

$$
\begin{aligned}
1/2 * x &= -1/4 \\
\Rightarrow \quad -4 \cdot 1/2x &= -1/4 \\
\Rightarrow \quad -2x &= -1/4 \\
\Rightarrow \quad x &= 1/8
\end{aligned}
$$

Siten käänteisalkio on 1/8.

Mikä tässä menee pieleen?