Algebra I

Luento 21.2.2012

Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Kokeeseen liittyviä asioita

- Useamman alkion virittämät aliryhmät

- Ekvivalenssirelaatio

KURSSIKOE

- Viimeinen kokeeseen tuleva luku on syklisiä ryhmiä käsittelevä luku 8.
  - Syklisten ryhmien aliryhmiä käsittelevä alaluku 8.5 ei kuitenkaan kuulu koealueeseen.
  - Lukuteoriasta vain ne asiat, joita on käsitelty.
- Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa. (Ei niillä kyllä mitään tekisikään.)
- Paja on koeviikolla auki maanantaina ja tiistaina.

USEAMMAN ALKION VIRITTÄMÄT ALIRYHMÄT

Olkoon G ryhmä ja $S \subset G$.

Joukon S virittämä aliryhmä on pienin ryhmän G aliryhmä, joka sisältää joukon S.

Tätä aliryhmää merkitään $\langle S \rangle$.

Esimerkki

Määritetään ryhmän S_4 aliryhmä $\langle\, (13), (24)\, \rangle$

Mitä kaikkea aliryhmässä pitää olla?

$$
\begin{aligned}
&(13)^2 = (1)\\
&(24)^2 = (1)\\
&(13)\cdot(24) = (13)(24)\\
&(24)\cdot(13) = (24)(13) = (13)(24)\\
&(13)^{-1} = (13)\\
&(24)^{-1} = (24).
\end{aligned}
$$

EKVIVALENSSIRELAATIO

Relaatio

- Relaatiot kuvaavat matemaattisten olioiden suhteita.
- Esimerkiksi reaalilukujen järjestysrelaatio $<$.

Relaatio

- R on joukon A relaatio, jos jokaiselle joukon A alkioparille (a, b) on määritelty, onko alkio a relaatiossa R alkion b kanssa vai ei.

- Jos a on relaatiossa R alkion b kanssa, merkitään aRb.

- Usein relaatiota merkitään kirjaimen R sijasta jollakin symbolilla, esimerkiksi $<$, $\subset$ tai $\sim$.

Ekvivalenssielaatio

- Relaatioiden erikoistapaus on niin kutsuttu ekvivalenssirelaatio.

- Sitä voidaan käyttää alkioiden luokittelemiseen.

Esimerkki luokittelusta

- Suomen asukkaat voidaan jakaa luokkiin maakuntien mukaan.

- Matemaattisesti voidaan sanoa, että samassa maakunnassa asuvat ihmiset ovat keskenään ekvivalentteja.

Maakuntaluokittelun ominaisuuksia

- Jokainen ihminen asuu samassa maakunnassa itsensä kanssa. Jokainen on siis itsensä kanssa ekvivalentti.

- Jos Niina asuu Pekan kanssa samassa maakunnassa, niin Pekka asuu Niinan kanssa samassa maakunnassa. Ekvivalenttius on siis symmetristä.

- Jos Niina asuu Pekan kanssa samassa maakunnassa ja Pekka asuu Tainan kanssa samassa maakunnassa, Niina asuu Tainan kanssa samassa maakunnassa.

Ekvivalenssirelaation määritelmä

Joukon A relaatio R on ekvivalenssirelaatio, jos R toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $a, b, c \in A$:

1. aRa (refleksiivisyys)

2. jos aRb, niin bRa (symmetrisyys)

3. jos aRb ja bRc, niin aRc (transitiivisuus)

Esimerkki

Suomen asukkaiden joukossa voidaan määritellä ekvivalenssirelaatio M seuraavan ehdon avulla:

aMb, jos a asuu samassa maakunnassa kuin b.

Esimerkki

Kaikkien tason suorien joukossa voidaa määritellä ekvivalenssirelaatio $\parallel$ seuraavasti:

$$l_1 \parallel l_2, \text{ jos suorat } l_1 \text{ ja } l_2 \text{ ovat yhdensuuntaisia.}$$

Esimerkki

Kongruenssi modulo n on ekvivalenssirelaatio.

Ekvivalenssiluokat

Olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio.

Alkion $a \in A$ ekvivalenssiluokan muodostavat kaikki a:n kanssa ekvivalentit alkiot.

Ekvivalenssiluokkaa merkitään $[a]_\sim$.

Maakuntaesimerkin ekvivalenssiluokat

Samassa maakunnassa asuvat ihmiset muodostavat yhden ekvivalenssiluokan.

Maakuntien asukkaat ovat ekvivalenssiluokkien edustajia.

Suoraesimerkin ekvivalenssiluokat

Suoran l ekvivalenssiluokassa ovat kaikki suorat, jotka ovat yhdensuuntaisia l:n kanssa.

Kussakin ekvivalenssiluokassa ovat siis kaikki keskenään yhdensuuntaiset suorat.

Kongruenssiesimerkin ekvivalenssiluokat

Kokonaisluvun a ekvivalenssiluokka on jäännösluokka

$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}.$$

Vielä yksi ekvivalenssiluokkaesimerkki

Määritellään joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ seuraavalla tavalla:

$$(a, b) \sim (c, d), \quad \text{jos} \quad a + d = b + c.$$

Kyseessä on ekvivalenssirelaatio. Mitkä ovat sen ekvivalenssiluokat?

Havainto

Niina ja Pekka asuvat samassa maakunnassa, jos ja vain jos Niinan edustama maakunta on sama kuin Pekan edustama maakunta.

Tulos

Olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio. Oletetaan, että $a, b \in A$.

Tällöin $a \sim b$, jos ja vain jos $[a] = [b]$.

Ositus

Olkoon A joukko.

Kokoelmaa epätyhjiä A:n osajoukkoja nimitetään osituk-seksi, jos jokainen $a \in A$ kuuluu täsmälleen yhteen kokoel-man osajoukkoon.

Kuinka ekvivalenssirelaatiosta saadaan ositus

Olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio. Ekvivalenssiluokkien joukko on A:n ositus.

Kuinka osituksesta saadaan ekvivalenssirelaatio

Oletetaan, että joukot C_i, missä $i \in I$, muodostavat joukon A osituksen.

Määritellään relaatio $\sim$ seuraavasti:

$a \sim b$, jos a ja b kuuluvat osajoukkoon C_i jollakin $i \in I$.

Tällöin $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

Lopputulos

Ekvivalenssirelaatiot ja ositukset ovat sama asia. Molemmilla voidaan luokitella joukon alkiot.