Algebra I

Luento 14.2.2012

Helsingin yliopisto

- Viime luennolla saatiin käsiteltyä isomorfismi ja ryhdyttiin puhumaan virittämisestä.

- Tällä luennolla käsitellään lisää virittämistä.

Virittäminen

- Olkoon G ryhmä ja g sen alkio. Pienintä aliryhmää, joka sisältää alkion g, kutsutaan alkion g virittämäksi aliryhmäksi.

- Tätä aliryhmää merkitään $\langle g \rangle$.

Tulos

Ryhmän G alkion g virittämä aliryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Esimerkki

Ryhmässä $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$:

$$\langle -1 \rangle = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{1, -1\}$$

Esimerkki

Ryhmässä K_{12}:

$$\langle 4 \rangle = \{4, 8, 12\}$$

Esimerkki

Ryhmässä $(\mathbb{Z}, +)$:

$$\langle 4 \rangle = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Esimerkki

Ryhmässä S_6:

$$\langle(14)(263)\rangle = ?$$

Merkitään $\alpha = (14)(263)$ ja lasketaan potensseja.

$$\begin{aligned}
\alpha^0 &= (1),\\
\alpha^1 &= (14)(263),\\
\alpha^2 &= (236),\\
\alpha^3 &= (14),\\
\alpha^4 &= (263),\\
\alpha^5 &= (14)(236),\\
\alpha^6 &= (1) = \alpha^0,\\
\alpha^7 &= (14)(263) = \alpha^1,\\
\alpha^8 &= (236) = \alpha^2 \quad \text{jne.}
\end{aligned}$$

Lasketaan vielä negatiivisia potensseja:

$$\alpha^{-1} = (14)(236) = \alpha^5$$

$$\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n = \alpha^{5n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

Lopputulos

$$\langle (14)(263) \rangle = \langle \alpha \rangle = \{(1),\, \alpha,\, \alpha^2, \ldots ,\, \alpha^5\}$$

Tämä ei ollut aivan täsmällistä!

Parempi tulos

Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Oletetaan, että positiiviselle kokonaisluvulle n pätee $g^n = e$. Tällöin

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}.$$

Esimerkki

Määritetään ryhmän K_{12} aliryhmä $\langle 10 \rangle$.

Kertaluku

Alkion g kertaluku $o(g)$ on sen virittämän aliryhmän $\langle g \rangle$ kertaluku.

Tulos

- Alkion g kertaluku on pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla pätee $g^n = e$.

- Jos tällaista lukua ei löydy, kertaluku on ääretön.

Esimerkki

- Ryhmän S_6 alkion (14)(236) kertaluku on 6.
- Ryhmän K_{12} alkion 4 kertaluku on 3.
- Ryhmän $\mathbb{Z}$ alkion 4 kertaluku on ääretön.