

Algebra I

Luento 7.2.2012
Helsingin yliopisto

- Kannattaa seurata kurssisivulta ajankohtaisia asioita.
- Kurssisivulla voi jättää nimetöntä palautetta.
- Palauta harjoitukset pajassa aina samaan isoon lootaan.
- Jos paja on kiinni, laskuharjoituksia voi jättää laskupajaan (C337).
- Lue malliratkaisuja, jotta tiedät mikä meni oikein ja mikä väärin. Niistä kannattaa myös ottaa mallia tuleviin tehtäviin. (Esim. yhtälönratkaisu.)

Isomorfisuus

- Jos ryhmillä on samanlaiset kertotaulut, ryhmät ovat algebran näkökulmasta samanlaiset.
- Tällaisia ryhmiä kutsutaan isomorfisiksi.

Esimerkki

	1	2	3		(1)	(123)	(132)
1	2	3	1	(1)	(1)	(123)	(132)
2	3	1	2	(123)	(123)	(132)	(1)
3	1	2	3	(132)	(132)	(1)	(123)

Kolmen alkion ryhmät

- Kolmen alkion ryhmiä on vain yksi, jos isomorfiset ryhmät lasketaan samoiksi.
- Tämä johtuu siitä, että ryhmän kertotaulussa jokainen alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran.

Sudoku-sääntö

Väite: Ryhmän kertotaulussa jokainen alkio esiintyy jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa täsmälleen kerran.

Kolmen alkion ryhmät

Väite: Kolmen alkion ryhmiä on vain yksi, jos isomorfiset ryhmät lasketaan samoiksi.

Neljän alkion ryhmät

- Neljän alkion ryhmiä on täsmälleen kaksi, kun isomorfiset ryhmät lasketaan samoiksi.
 - syklinen neljän alkion ryhmä
 - Kleinin neliryhmä

Neljän alkion ryhmät

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

\cdot	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

Kellotauluryhmä K_4

	4	1	2	3
4	4	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2

Eräs permutaatioryhmä

	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(1)	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	(1)	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	(1)	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	(1)

Isomorfismin määritelmä

Olkoot $(G, *)$ ja (H, \circ) ryhmiä ja $f: G \rightarrow H$ jokin kuvaus. Kuvaus f on ryhmäisomorfismi, jos seuraavat ehdot pätevät:

(IM1) Kuvaus f on bijektio.

(IM2) Kaikilla ryhmän G alkioilla x ja y pätee

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Isomorfiset ryhmät

- Jos ryhmien välillä on isomorfismi, sanotaan, että ryhmät ovat isomorfiset.
- Jos ryhmät G ja H ovat isomorfiset, merkitään $G \cong H$.

Esimerkki

- Osoitetaan, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(3\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.