Algebra I

Luento 4.4.2012

Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Tekijäryhmät
- Normaali aliryhmä
- Homomorfismi

Tekijäryhmä

Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja N sen normaali aliryhmä.

Sivuluokkien joukko G/N on ryhmä, kun sen laskutoimitus määritellään seuraavasti:

$$gN \cdot hN = ghN \quad \text{kaikilla } g, h \in G.$$

Ryhmää G/N kutsutaan G:n tekijäryhmäksi aliryhmän N suhteen

Esimerkki

Osoitetaan, että ryhmän S_3 aliryhmä $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ on normaali.

Määritelmä

Ryhmän G aliryhmä N on normaali, jos

$$gN = Ng \quad \text{kaikilla } g \in G.$$

Miten osoittaa, että aliryhmä on normaali?

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Oletetaan, että vasempien ja oikeiden sivuluokkien muodostamat ositukset ovat samat eli $G/H = H\backslash G$.

Tällöin $gH = Hg$ kaikilla $g \in G$.

Esimerkki

Ryhmän S_4 aliryhmä $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

$$
\begin{aligned}
(12)V &= \{(12), (34), (1324), (1423)\} \\
(13)V &= \{(13), (1234), (24), (1432)\} \\
(23)V &= \{(23), (1342), (1243), (14)\} \\
(123)V &= \{(123), (134), (243), (142)\} \\
(132)V &= \{(132), (234), (124), (143)\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(12) &= \{(12), (34), (1324), (1423)\} \\
V(13) &= \{(13), (1234), (24), (1432)\} \\
V(23) &= \{(23), (1342), (1243), (14)\} \\
V(123) &= \{(123), (134), (243), (142)\} \\
V(132) &= \{(132), (234), (124), (143)\}.
\end{aligned}
$$

Miten osoittaa, että aliryhmä on normaali?

Normaalisuuskriteeri:

Olkoon G ryhmä ja N sen aliryhmä. Aliryhmä N on normaali, jos ja vain jos

$$gng^{-1} \in N \quad \text{kaikilla } n \in N \text{ ja } g \in G.$$

Esimerkki

Ryhmän G aliryhmät $\{e\}$ ja G.

Esimerkki

Ryhmän S_4 aliryhmä $H = \{(1), (14), (23), (14)(23)\}$.

Millainen on tekijäryhmä S_3/A_3?

Kolmion symmetriaryhmä

$$
\begin{aligned}
&\text{kolmiolle ei tehdä mitään} = (1)\\
&120^\circ\text{:n kierto vastapäivään} = (123)\\
&120^\circ\text{:n kierto myötäpäivään} = (132)\\
&\text{peilaus akselin 1 suhteen} = (23)\\
&\text{peilaus akselin 2 suhteen} = (13)\\
&\text{peilaus akselin 3 suhteen} = (12).
\end{aligned}
$$

Neliön symmetriaryhmä

Sisältää kahdeksan alkiota:

- neljä kiertoa
- neljä peilausta

Ryhmä S_3

$\cdot$	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(1)	(1)	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	(123)	(132)	(1)	(13)	(23)	(12)
(132)	(132)	(1)	(123)	(23)	(12)	(13)
(12)	(12)	(23)	(13)	(1)	(132)	(123)
(13)	(13)	(12)	(23)	(123)	(1)	(132)
(23)	(23)	(13)	(12)	(132)	(123)	(1)

Ryhmä S_3/A_3

$\cdot$	A_3	$\sigma_1 A_3$
A_3	A_3	$\sigma_1 A_3$
$\sigma_1 A_3$	$\sigma_1 A_3$	A_3

tai

$\cdot$	kierto	peilaus
kierto	kierto	peilaus
peilaus	peilaus	kierto

RYHMÄHOMOMORFISMI

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvausta $f: G \to H$ nimitetään ryhmähomomorfismiksi, jos kaikilla $x, y \in G$ pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Ryhmähomomorfismi

Isomorfismi on bijektiivinen homomorfismi.

Esimerkki

Kuvaus $\pi\colon (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z}_5,+)$, $\pi(a) = [a]_5$.

Esimerkki

Kuvaus $\pi\colon (\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z}_5,+)$, $\pi(a) = [a]_5$.

Esimerkki

Oletetaan, että G ja H ovat ryhmiä. Olkoon e_H ryhmän H neutraalialkio.

Kuvaus $f_e\colon G \to H$, joka määritellään ehdolla

$$f_e(x) = e_H \quad \text{kaikilla } x \in G$$

on ryhmähomomorfismi.

Homomorfismit säilyttävät ominaisuuksia

- Neutraalialkio kuvautuu neutraalialkiolle.
- Käänteisalkiot kuvautuvat käänteisalkioiksi.
- Aliryhmät kuvautuvat aliryhmiksi.

Ydin

Ryhmähomomorfismin $f\colon G \to H$ ydin Ker(f) on neutraalialkion alkukuva eli joukko

$$f^{\leftarrow}\{e_H\} = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}.$$

Esimerkki

Homomorfismin $\pi\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_5, +)$, $\pi(a) = [a]_5$ ydin.

Mitä ydin kertoo homomorfismista?

Ryhmähomomorfismi $f\colon G \to H$ on injektio, jos ja vain jos $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.