

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 24.2.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 23.3.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia asioita ovat

- Syklinen ryhmä
- Useamman alkion virittämä aliryhmä
- Ekvivalenssirelaatio

Tehtävä I

1. Määritä kaikkien ryhmän \mathbb{Z}_8 alkioden kertaluvut. Mitkä alkioista virittävät ryhmän?
2. Onko ryhmä S_3 syklinen?
3. Onko ryhmä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ syklinen?

Tehtävä II

4. Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen ryhmä, myös H on vaihdannainen ryhmä.
5. Onko symmetrinen ryhmä S_3 isomorfinen ryhmän \mathbb{Z}_6 kanssa?

Tehtävä III

Tutustu kurssikirjan lukuun 6.3, jossa käsitellään useamman alkion virittämiä aliryhmiä.

6. a) Oletetaan, että ryhmän \mathbb{Z} aliryhmässä on alkiot 12 ja 18. Tutki, mitä muita alkioita aliryhmässä on pakko olla. Arvaa tämän perusteella, mikä voisi olla pienin aliryhmä, joka sisältää luvut 12 ja 18.
b) Totea, että löytämäsi joukko on todellakin aliryhmä.

c) Oletetaan, että myös aliryhmä K sisältää alkioit 12 ja 18. Osoita, että löytämäsi aliryhmä on K :n osajoukko.

Olet nyt määrittänyt pienimmän aliryhmän, joka sisältää alkioit 12 ja 18, eli aliryhmän $\langle 12, 18 \rangle$.

7. Määritä ryhmän \mathbb{Z} aliryhmä $\langle 3, 5 \rangle$.

Tehtävä IV

Tutustu lukuun 9, jossa käsitellään ekvivalenssirelaatioita.

Määritä seuraavissa tapauksissa, onko annettu relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen.

8. kokonaislukujen relaatio R , joka määritellään seuraavasti:

$$aRb, \quad \text{jos } a \mid b$$

9. kokonaislukujen relaatio R , joka määritellään seuraavasti:

$$aRb, \quad \text{jos luvussa } a \text{ on yhtä monta numeroa kuin luvussa } b$$

10. kaikkien ihmisten joukon relaatio \heartsuit , joka määritellään seuraavasti:

$$x \heartsuit y, \quad \text{jos } x \text{ on } y\text{:n äiti}$$

11. Edellisistä relaatioista yksi on ekvivalenssirelaatio. Mikä niistä? Määritä sen ekvivalenssiluokat.

Tehtävä V

Määritellään joukon \mathbb{R} relaatio \sim seuraavasti:

$$x \sim y, \quad \text{jos } x - y \in \mathbb{Q}.$$

12.* Osoita, että kyseessä on ekvivalenssirelaatio.

13.* Päteekö $[2] = [3]$? Entä $[2] = [\sqrt{3}]$? Ratkaise tehtävä määrittämättä ekvivalenssiluokkien alkioita. (Voit toki tehtävää pohtiessasi miettiä, millaisia alkioita ekvivalenssiluokissa on.)

14.* Määritä ekvivalenssiluokat $[1]$ ja $[\pi]$.

Tehtävä VI

Valitse seuraavista kongruensseja käsittelevistä tehtävistä yksi. Voit toki tehdä kaikki tehtävät, mutta vain yhden tekemisestä saa lisäpisteen.

15. Mikä on jakojäännös, kun $7^{541} + 3^{1002}$ jaetaan luvulla 8?
16. Vuonna 2013 ystävänpäivä on torstaina. Minä viikonpäivänä ystävänpäivä on vuonna 2014?
17. Osoita todeksi niin kutsuttu fuksin unelma: jos p on alkuluku, niin

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p} \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{Z}.$$