Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 10.2.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 24.2.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Permutaatiot ja symmetrinen ryhmä
- Isomorfisuus

Tehtävä I

1. Määritä ryhmän S_5 permutaatioiden (34) ja $(13)(254)$ käänteisalkiot.

2.* Ratkaise yhtälö $(13)(254) \cdot x \cdot (34) = (123)$ ryhmässä S_5. Voit katsoa mallia harjoituksen 2 tehtävästä 11.

Tehtävä II

3. Olkoon $(G, +)$ ryhmä. Oletetaan, että

$$2(x + y) = 2x + 2y$$

pätee kaikilla $x, y \in G$. Osoita, että ryhmä on vaihdannainen. Muista käyttää yhteenlaskuun sopivia merkintöjä.

4. Selitä lyhyesti omin sanoin, mitä käänteisalkiot ja vasta-alkiot ovat. Mitä eroa käsitteillä on?

Tehtävä III

Lue kirjan luvut 5.1 ja 5.2, jotka käsittelevät ryhmien kertotauluja ja isomorfisuutta.

5. Ryhmällä S_4 on aliryhmä $H = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$. Kirjoita aliryhmän kertotaulu ja vertaa sitä lauseen 5.2 kertotauluihin. Kumman nelialkioisen ryhmän kanssa H on isomorfinen?

6.* Kirjoita tuloryhmän $K_2 \times K_2$ yhteenlaskutaulu. Tässä K_2 on kellotauluryhmä, ja tuloryhmän laskutoimitus määritellään komponenteittain:

$$(a, b) \text{◷} (c, d) = (a \text{◷} c, b \text{◷} d) \quad \text{kaikilla } a, b, c, d \in K_2.$$

Kumman nelialkioisen ryhmän kanssa $K_2 \times K_2$ on isomorfinen?

Tehtävä IV

Lue kirjan luku 5.3, jossa annetaan varsinainen määritelmä isomorfisuudelle.

7. Osoita, että kuvaus $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = n + 1$ on bijektio.

8. Tutkitaan jälleen joukon $\mathbb{Z}$ laskutoimitusta $*$, joka määritellään ehdolla

$$n * m = n + m + 1 \quad \text{kaikilla } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Tiedetään, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä. Osoita, että edellisen tehtävän kuvaus on isomorfismi ryhmien $(\mathbb{Z}, *)$ ja $(\mathbb{Z}, +)$ välillä.

9.* Merkitään $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Harjoituksen 3 tehtävässä 2 osoitettiin, että $(H, \cdot)$ on ryhmän $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ aliryhmä. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(H, \cdot)$ ovat isomorfiset.

Vihje: Mieti, mitä kokonaislukuja ryhmän H alkiot voisivat vastata, ja määrittele sen perusteella kuvaus ryhmien välille.

Tehtävä V

10. Etsi jokin ryhmän $\mathbb{Z}$ aito aliryhmä, joka sisältää alkiot 10 ja 25.

11. Onko olemassa ryhmän $\mathbb{Z}$ aitoa aliryhmää, joka sisältää alkion 1?

Tehtävä VI

Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla pätee

12. $(14)^n = (1)$

13. $(235)^n = (1)$

14. $\big((14)(253)\big)^n = (1)$.

Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

15. Tutkitaan korttipakkaa, jossa on kymmenen korttia. Sekoitetaan kortteja niin, että otetaan pakan päältä neljän kortin pino ja laitetaan se pakan alle. Kirjoita sekoitusta vastaava permutaatio syklimuodossa. Selvitä permutaation avulla, kuinka monen sekoituskerran jälkeen ollaan takaisin lähtötilanteessa.

    Tämän idean kehittelyä voi jatkaa itsekseen, jos haluaa. Mitä tapahtuu muunlaisilla sekoitustavoilla?

16. Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K. Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä. Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K, joiden tulo HK ei ole aliryhmä.

Tehtävä VIII

Ylimääräinen tehtävä, josta ei jaeta lisäpisteitä.

17. Katso tv-sarja Futuraman jakso The Prisoner of Benda (tuotantokausi 6, jakso 10).