

**Algebra I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kevät 2012**  
**Harjoitus 3**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 3.2.2012 klo 18.00  
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 17.2.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Aliryhmä
- Permutaatiot
- Symmetriset ryhmät

**Tehtävä I**

1. Onko  $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ryhmän  $(\mathbb{Q}, +)$  aliryhmä?
- 2.\* Onko  $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  ryhmän  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  aliryhmä?
3. Onko  $(K_{12}, \oplus)$  ryhmän  $(\mathbb{Z}, +)$  aliryhmä?

**Tehtävä II**

4. Etsi neljä kellotauluryhmän  $K_6$  aliryhmää.

**Tehtävä III**

Lue kirjasta kappale 4.1, jossa käsitellään permutaatioita. Seuraavissa tehtävissä tutkitaan permutaatioita

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Piirrä kuvat permutaatioista  $\sigma$ ,  $\tau$  ja  $\rho$ . Voit valita mielestäsi parhaan tavan havainnollistaa permutaatiota.

Lue sitten kappale 4.2, jossa käsitellään permutaatioiden tuloa.

6. Laske tulot  $\sigma\tau$ ,  $\tau\sigma$  ja  $\sigma\rho$ .

Lue vielä kappaleesta 4.3 permutaation radoista.

7. Määritä permutaatioiden  $\sigma$ ,  $\tau$  ja  $\rho$  radat. Kuvista on apua.

## Tehtävä IV

Kirjan luvussa 4.3 kerrotaan permutaation sykliesityksestä. Seuraavassa on annettu permutaatioiden sykliesityksiä. Piirrä permutaatioista kuvat, joista näkyy, miten permutaatio kuvaa määrittelyjoukon alkioita.

8. ryhmän  $S_4$  permutaatio (1432)
9. ryhmän  $S_6$  permutaatio (1432)
10. ryhmän  $S_5$  permutaatio (132)(45)

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

11. Ryhmän  $S_6$  alkiot (16)(35) ja (35)(16) ovat samat.
12. Ryhmän  $S_6$  alkiot (236) ja (1)(236)(4)(5) ovat samat.
13. Ryhmän  $S_4$  alkiot (134) ja (143) ovat samat.

## Tehtävä V

- 14.\* Määritellään

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Kirjoita permutaatioiden  $\alpha$  ja  $\beta$  sykliesitykset. Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

- 15.\* Laske ryhmässä  $S_6$  tulot (143) · (16) ja (136)(45) · (36)(45). Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.
16. Määritä ryhmän  $S_4$  alkion  $\alpha = (1234)$  käänteisalkio.

## Tehtävä VI

17. Olkoot  $G$  ja  $H$  ryhmiä. Osoita, että karteesinen tulo  $G \times H$  on ryhmä, kun laskutoimitus määritellään komponenteittain:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) \quad \text{kaikilla } a, c \in G \text{ ja } b, d \in H.$$

Jos et muista tai tiedä, mikä karteesinen tulo on, voit lukea siitä kurssikirjasta.

## Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä kertaa ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

18. Osoita, että joukko  $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  on ryhmän  $S_4$  aliryhmä.
19. Lauseessa 3.17 on osoitettu, että kahden aliryhmän leikkaus on aina aliryhmä. Milloin kahden aliryhmän yhdiste on aliryhmä?