

**Algebra I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kevät 2012**  
**Harjoitus 2**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 27.1.2012 klo 18.00  
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 10.2.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Ryhmä
- Aliryhmä

**Tehtävä I**

1. Määrittääkö ehto  $a * b = 2a^2 - b + 3$  joukon  $\mathbb{N}$  laskutoimituksen?
2. Määrittääkö ehto  $a * b = 40$  joukon  $\mathbb{N}$  laskutoimituksen?
3. Määrittääkö ehto

$$\frac{m}{n} * \frac{k}{l} = \frac{m+k}{n+l}$$

joukon  $\mathbb{Q}$  laskutoimituksen? (Tässä  $m, k \in \mathbb{Z}$  ja  $n, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .)

**Tehtävä II**

4. Määritellään rationaalilukujen laskutoimitus  $*$  ehdolla  $a * b = ab^2$ . Seuraavassa on yritetty osoittaa, että laskutoimitus  $*$  ei ole liitännäinen. Todistuksessa on kuitenkin virheitä. Selitä, mitä ne ovat, ja korjaa todistus.

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (bc^2) = ab^2c^4 \\ (a * b) * c &= (ab^2) * c = ab^2c^2 \end{aligned}$$

Koska  $ab^2c^4 \neq ab^2c^2$ , laskutoimitus ei ole liitännäinen.

**Tehtävä III**

Päättele seuraavissa tehtävissä, muodostavatko annettu joukko ja laskutoimitus ryhmän.

5. Joukko  $\{a, b, c, d\}$ , jonka laskutoimitus on määritelty laskutoimitustaululla

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$d$	$c$	$b$	$a$
$b$	$c$	$c$	$a$	$b$
$c$	$b$	$a$	$d$	$c$
$d$	$a$	$b$	$c$	$d$

6. \* Joukko  $\{X, Y, Z\}$ , jonka laskutoimitus on määritelty laskutoimitustaululla

$\Delta$	$X$	$Y$	$Z$
$X$	$Y$	$X$	$Z$
$Y$	$Z$	$Y$	$X$
$Z$	$X$	$Z$	$Y$

7. Määritellään matematiikan laitoksen professorien joukossa laskutoimitus  $\diamond$  seuraavasti. Jos  $a$  ja  $b$  ovat professoreita, niin tulos  $a \diamond b$  on näistä kahdesta professorista se, joka on parempi matemaatikko.

#### Tehtävä IV

8. \* Tarkastellaan harjoituksesta 1 tuttua kokonaislukujen laskutoimitusta, joka määritellään ehdolla  $x * y = x + y + 1$ . Osoita, että  $(\mathbb{Z}, *)$  on ryhmä. (Voit käyttää hyväksesi harjoituksen 1 tehtäviä.)

#### Tehtävä V

9. Osoita, että  $\{6, 12\}$  on kellotauluryhmän  $K_{12}$  aliryhmä.
10. \* Tutkitaan ryhmää  $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ , jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$f$	$d$	$a$	$e$	$b$	$c$
$b$	$e$	$c$	$b$	$f$	$a$	$d$
$c$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$d$	$b$	$a$	$d$	$c$	$f$	$e$
$e$	$d$	$f$	$e$	$a$	$c$	$b$
$f$	$c$	$e$	$f$	$b$	$d$	$a$

Osoita, että joukko  $H = \{a, c, f\}$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.

## Tehtävä VI

11. \* Olkoon  $G$  ryhmä, jossa on alkiot  $a$  ja  $b$ . Määritä yhtälön  $ax^3b = x^2b$  ratkaisut eli etsi kaikki sellaiset alkiot  $x \in G$ , jotka toteuttavat yhtälön.
12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Oletetaan hetkeksi, että ryhmän  $G$  laskutoimitusta merkitäänkin yhteenlaskuna. Esitä edellinen tehtävä ratkaisuineen käyttämällä kertolaskumerkinnän sijasta yhteenlaskumerkintää.
13. Osoita, että ryhmässä  $G$  on täsmälleen yksi alkio  $g$ , jolle pätee  $g^2 = g$ .

## Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä kertaa ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

14. Osoita, että  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  on ryhmä, kun laskutoimituksena on reaalilukujen kertolasku.
15. Olkoon  $G$  ryhmä, jolla on neutraalialkio  $e$ . Oletetaan, että  $g^2 = e$  kaikilla  $g \in G$ . Osoita, että  $G$  on vaihdannainen.