Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 11

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 18.4.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 2.5.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia aiheita ovat

- Tekijäryhmä
- Ryhmähomomorfismi

Tutustu kirjan lukuun 18, jossa käsitellään tekijäryhmiä.

Tehtävä I

1. Tarkastellaan ryhmää $\mathbb{Z}_9$ ja sen normaalia aliryhmää $N = \langle [3]_9 \rangle$. Määritä tekijäryhmän $\mathbb{Z}_9/N$ alkiot.

2.* Kirjoita tekijäryhmän $\mathbb{Z}_9/N$ yhteenlaskutaulu.

3. Järjestä ryhmän $\mathbb{Z}_9$ yhteenlaskutaulussa alkiot aliryhmän N sivuluokkien mukaan. Miten taulussa näkyy tekijäryhmä $\mathbb{Z}_9/N$?

Tehtävä II

4. Neliön symmetriaryhmä D_4 koostuu neliön symmetrioista, joita ovat kierrot ja peilaukset. Ryhmän kertotaulu on esitety ohessa. Kiertoja on merkitty symbolilla ρ ja peilauksia symbolilla σ. Voit halutessasi lukea neliön symmetriaryhmästä lisää luvusta 11.3.

   Osoita, että ryhmällä D_4 on normaali aliryhmä $R_2 = \{1, \rho_2\}$.

$\cdot$	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

5.* Osoita, että $H = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$ ei ole ryhmän S_4 normaali aliryhmä.

Tehtävä III

6.* Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Osoita, että $HH = H$. (Muista, että kaksi joukkoa osoitetaan samoiksi näyttämällä, että ne ovat toistensa osajoukkoja.)

7. Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Osoita, että tekijäryhmän G/N alkiolle gN pätee $(gN)^k = g^k N$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

Tehtävä IV

8. Tutkitaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Osoita, että alkiolla $1/2 + \mathbb{Z}$ on tekijäryhmässä vasta-alkiot $-1/2 + \mathbb{Z}$, $5/2 + \mathbb{Z}$ ja $1/2 + \mathbb{Z}$.

9. Miksei edellinen tehtävä ole ristiriidassa sen kanssa, että ryhmän alkioiden käänteisalkiot ovat yksikäsitteisiä?

10. Tarkastellaan ryhmän $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ aliryhmää $N = \langle [4]_{20} \rangle$. Mitkä ovat alkioiden $[2]_{20} + N$ ja $[3]_{20} + N$ kertaluvut? (Mieti tarkkaan, mikä on alkion kertaluvun määritelmä.)

Tehtävä V

Tutustu kirjan lukuun 18, jossa käsitellään ryhmähomomorfismeja. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat ryhmähomomorfismeja?

11. $g\colon (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $g(x) = 3x$

12. $h\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $h(n) = (-1)^n$

13. $f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $f(a, b) = (a, 0)$

14. Määritä edellisten tehtävien ryhmähomomorfismien ytimet.

Tehtävä VI

Jos et ole vielä lukenut polynomilukua 21 kokonaan, se kannattaa tehdä nyt.

15.* Onko polynomirengas $\mathbb{Z}_4[X]$ kokonaisalue?

16. Onko polynomirengas $\mathbb{Z}_5[X]$ kunta?

17. Ovatko polynomien $2X^3 + X^2 + 1$ ja $X^4 + 2X^2 + 1$ määräämät polynomikuvaukset samat, kun kerroinrenkaana on $\mathbb{Z}_4$? Entä kun kerroinrenkaana on $\mathbb{Q}$?

Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain yhden tekemisestä saa lisäpisteen.

18. Totea, että $20\mathbb{Z} \trianglelefteq 4\mathbb{Z}$ ja määritä tekijäryhmän $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ yhteenlaskutaulu. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä on isomorfinen?

19. Olkoon G ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N. Oletetaan lisäksi, että $[G : N] = k$. Osoita, että $g^k \in N$ kaikilla $g \in G$.