Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 10

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 4.4.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 25.4.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia aiheita ovat

- Kunta
- Kokonaisalue
- Normaali aliryhmä ja sivuluokkien laskutoimitus

Tehtävä I

1.* Osoita, että joukko
$$\left\{\frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$
on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas.

2. Määritellään $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$. Osoita, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Rengas R sisätyy renkaseen $\mathbb{Z}_{10}$. Onko se renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ alirengas?

3. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Osoita, että jos $(R, \cdot)$ on ryhmä, renkaassa R on vain yksi alkio, nolla.

Tehtävä II

Tutustu lukuun 13, jossa käsitellään kuntia.

4. Määritä renkaan $\mathbb{Z}_3$ yksiköt. Onko $\mathbb{Z}_3$ kunta?

5.* Onko tulorengas $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ kunta?

6.* Onko tehtävän 2 rengas R kunta?

7. Osoita määritelmän perusteella, että $[2]_{15} \in \mathbb{Z}_{15}^*$.

8. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{15}^*$ aliryhmä $\langle [2]_{15} \rangle$.

Tehtävä III

Tutustu kirjan lukuun 14, jossa käsitellään kokonaisalueita.

9. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 - 4 = 0$.

10. Millaisia ratkaisuja edellisen tehtävän yhtälöllä on renkaassa $\mathbb{Z}_4$? Miten selität sen, että näissä kahdessa tehtävässä saamasi ratkaisut eivät ole samoja?

11. Osoita, että jokaisessa kokonaisalueessa D pätee niin sanottu *supistamissääntö*: jos $ab = ac$ ja $a \neq 0$ joillakin $a, b, c \in D$, niin $b = c$.

Tehtävä IV

Tutustu lukuihin 15.1 ja 15.2, joissa käsitellään normaaleja aliryhmiä ja sivuluokkien laskutoimituksia.

12. Ryhmän S_3 aliryhmän $H = \{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat määritettiin harjoituksen 8 tehtävässä 4. Määritä aliryhmän oikeat sivuluokat. Onko aliryhmä normaali?

13. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on normaali aliryhmä $H = \langle [4]_{16} \rangle$, jota tutkittiin harjoituksen 8 tehtävässä 11. Aliryhmän H sivuluokkien joukoksi saatiin $\mathbb{Z}_{20}/H = \{H,\ [1]_{16} + H,\ [2]_{16} + H,\ [3]_{16} + H\}$. Määritä summat

$$([2]_{16} + H) + ([1]_{16} + H) \quad \text{ja} \quad ([2]_{16} + H) + ([2]_{16} + H).$$

14. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

    a) $[10]_{16} \in ([1]_{16} + H) + ([1]_{16} + H)$
    b) $[11]_{16} \in ([3]_{16} + H) + ([2]_{16} + H)$
    c) $([1]_{16} + H) + ([2]_{16} + H) = ([3]_{16} + H) + ([3]_{16} + H)$

15.* Tutkitaan ryhmää $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h\}$, jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä G on normaali aliryhmä $H = \{1, c, f\}$. Aikaisemmassa tehtävässä on saatu sivuluokkien joukoksi $G/H = \{H, aH, bH, cH\}$. Mitä joukon G/H alkioita ovat $aH \cdot cH$ ja $cH \cdot cH$? Kirjoita tulokset samojen edustajien avulla kuin edellä.

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h	1
b	b	c	d	e	f	g	h	1	a
c	c	d	e	f	g	h	1	a	b
d	d	e	f	g	h	1	a	b	c
e	e	f	g	h	1	a	b	c	d
f	f	g	h	1	a	b	c	d	e
g	g	h	1	a	b	c	d	e	f
h	h	1	a	b	c	d	e	f	g

Tehtävä V

16. Tutkitaan renkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ polynomia $P = -X^2 + 3X + X$. Määritä sitä vastaavan polynomikuvauksen kaikki arvot.

Tehtävä VI

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain yhden tekemisestä saa lisäpisteen.

17. Onko esimerkin 12.6 Boolen rengas $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ kokonaisalue, kun $X = \{0, 1\}$? Onko se kunta?

18. Tutkitaan 2×2 -matriiseja, joiden alkiot ovat kunnassa $\mathbb{Z}_3$. Ne muodostavat renkaan $M_2(\mathbb{Z}_3)$. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriiseissa olevista alkioista on jätetty selvyyden vuoksi hakasulut merkitsemättä.

a) Laske tulo AB.

b) Osoita, että matriisi B on yksikkö mutta A ei.

c) Selvitä matriisin B kertaluku yksikköryhmässä.