Mitta ja Integraali
Kesä 2017
7. tehtävät

Tarkistus PE 1.9. Loput tehtävät viimeisellä viikolla.

Tehtävä 1 *Laske*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}\ dx. \tag{1}$$

(Hajoita integraali kahteen osaan $\int_0^1 + \int_1^\infty$ *ja käytä sopivia konvergenssilauseita.)*

Tehtävä 2 *Todista (TN-teoriassa hyvin tärkeä) Chebyshevin epäyhtälö: Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ *mitallinen ja* $\epsilon > 0$ *ja* $0 < p < \infty$*. Tällöin pätee arvio*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_{\mathbb{R}^n} f^p. \tag{2}$$

Tämä epäyhtälö sanoo, että jos f:n integraali on "pieni", niin silloin se ei voi saada suhteellisen suuria arvoja ("$f > \epsilon$*") kovin suuri-mittaisessa joukossa. (Parametri p kannattaa aluksi laittaa ykköseksi, jotta saa ideasta kiinni. Todistus on varsin lyhyt.)*

Tehtävä 3 *Todista, että funktio* $f : [\pi,\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^{-1}\cos(x)$ *ei ole absoluuttisesti integroituva, eli* $\int_\pi^\infty |f| = \infty$*. Osoita kuitenkin, että epäoleellinen integraali (Riemann tai Lebesgue, ihan sama)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\pi^{n\pi} x^{-1}\cos(x)\ dx, \tag{3}$$

on olemassa. (Sitä ei tarvitse laskea.)

Tehtävä 4 *Käytä DKL:ää laskemaan raja-arvo*

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + (-\frac{1}{2})^k}\ dx. \tag{4}$$

Tehtävä 5 *Laske raja-arvo*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} e^{-kx^2}\ dx.$$

Vihje: [1]

Tehtävä 6 *Olkoon* f *integroituva. Osoita, että funktio* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(tx)\ dx,$$

on jatkuva.
($\widehat{f}$ *on funktion* f *Fourier-muunnos.)*

[1] Esitä muuttuvat integrointirajat karakteristisilla funktioilla.