Mitta ja Integraali
Kesä 2017
6. tehtävät

Tarkastus Ke 30.8

Tehtävä 1 *Olkoot* $f_1, f_2, \dots$ *jono mitallisia funktioita* $A \to \mathbb{R}$, *missä* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Osoita, että joukko* $B = \{x \in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ on olemassa}\}$ *on mitallinen.* *Vihje:* [1]

Tehtävä 2 *Olkoon* f_j *mitallinen funktio kaikilla* $j \in \mathbb{N}$. *Oletetaan että on olemassa funktio* f *siten, että* $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ *m.k.* x. *Olkoon nyt funktiot* g_j *sellaisia, että* $g_j(x) = f_j(x)$ *m.k.* x *kaikilla* j.
Osoita, että funktio f *toimii raja-arvofunktiona myös jonolle* (g_j), *eli että* $f(x) = \lim_{j\to\infty} g_j(x)$ *m.k.* x. *(Funktiojonon termejä voi siis muutella m.k muuttamatta oleellisesti raja-arvofunktiota.)*

Tehtävä 3 *Olkoon* $0 < s < 1$. *Laske MKL:ää käyttäen (tarkista ehdot!) seuraava raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}.$$

Tehtävä 4 *Todista "laskevan konvergenssin lause": Olkoon* $f_1 \geq f_2 \geq \dots \searrow f$ *positiivisia mitallisia funktioita ja lisäksi pätee* $\int f_1 < \infty$. *Osoita, että*

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j = \int f. \tag{1}$$

Vihje: [2]

Tehtävä 5 *Osoita Riemann-integraalin ja analyysin peruslauseen avulla, että funktion* $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $\phi(x) = |x|^{-1/2}\chi_{[-1,1]}$ *Lebesgue-integraali on äärellinen. (Huom. Olemme määritelleet funktion* ϕ *vain m.k.* x. *Jos haluaa, sen voi määritellä vaikka äärettömäksi pisteessä* $x = 0$, *mutta sillä ei ole merkitystä integrointiin.)*

Seuraavaksi eräs Lebesgue-integrointiteorian mielenkiintoinen ilmiö.

Tehtävä 6 *Jatkoa edelliseen tehtävään:*
Olkoon nyt $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rationaalilukujen numerointi. Osoita, että myös seuraavan funktion Lebesgue-integraali on äärellinen:*

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(q_n - x)}{2^n} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Hullua! Funktio on rajoittamaton jokaisella $\mathbb{R}$*:n avoimella välillä (se ei siis ole lähellekään Riemann-integroituva), ja silti sen Lebesgue integraali on äärellinen.*

[1] Mikä materiaalin ehto takaa lukujonon (tai funktiojonon) raja-arvo olemassaolon?
[2] Käytä joko graafijoukkoja, tai MKL:ää.