

Mitta ja Integraali  
Kesä 2017  
5. tehtävät

EI HARJOITUKSIA KE 23.8. Tarkistetaan pe 25.8

**Tehtävä 1** Osoita, että joukko  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 \leq yx^2 < 1\}$  on mitallinen. Vihje: <sup>1</sup>

**Tehtävä 2 (Mitallisten funktioiden tulo on mitallinen)** Olkoon  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  mitallisia. Osoita, että tulo  $f \cdot g : A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$  on mitallinen.

Näistä voit opiskella Konvergenssilauseet-luvun alusta:

**Tehtävä 3 (lim sup- ja lim inf-harjoitus)** Laske  $\limsup_n a_n$  ja  $\liminf_n a_n$  kun

A)  $a_n = (-1)^n$

B)  $a_n = \cos(a_n)$ , missä  $(a_n)_{n=1}^\infty$  on rationaalilukujen numerointi.

C) Todista myös kaava

$$\liminf_n -a_n = -\limsup_n a_n. \quad (1)$$

**Tehtävä 4** Olkoon  $(a_n)_{n=1}^\infty$  ja  $(b_n)_{n=1}^\infty$  reaalityönä jonoja. Todista epäyhtälö

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n. \quad (2)$$

Anna esimerkki jonoista, joilla epäyhtälö on aito. (Älä etsi liian monimutkaisia.)

(Vihje: Aloita osoittamalla  $\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$ .)

**Tehtävä 5** Etsi funktion  $\sqrt{2}\chi_{[0,\pi]} + 5\chi_{[\pi/2,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$  normaaliesitys ja laske sen integraali.

**Tehtävä 6** A) Olkoon funktiot  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mitallisia. Osoita, että joukko

$$\{x : f_{n+1}(x) \geq f_n(x)\},$$

on mitallinen kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

B) Edellisen avulla osoita nyt että joukko

$$\{x : \text{lukujono } (f_n(x))_{n=1}^\infty \text{ on kasvava.}\},$$

on mitallinen.

---

<sup>1</sup>Esitä joukko sopivan (mitallisen) funktion  $f(x, y)$  alkukuvana jostakin joukosta.