Mitta ja Integraali
Kesä 2017
4. tehtävät

KE 16.8 EI HARJOITUKSIA. Nämä tehtävät tarkastetaan PE 18.8.

**Tehtävä 1** *Harjoitusta sigma-algebran käsitteeseen:*
*Olkoon $X$ ylinumeroituva joukko. Määritellään*
$\Gamma := \{E \subset X : E \text{ on numeroituva, tai } E^c \text{ on numeroituva}\}$. *Määritellään myös* $\mu(E) := 0$ *jos* $E$ *on numeroituva ja* $\mu(E) := \infty$ *jos* $E^c$ *on numeroituva. Osoita, että* $\Gamma$ *on sigma-algebra ja* $\mu$ *on mitta.*

**Tehtävä 2** *Todista monisteen Borel-Cantelli lemma (tärkeä TN-teoriassa):*
*Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $A_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$. *Jos pätee*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty, \tag{1}$$

*niin silloin*

$$\mu(\limsup_n A_n) = 0. \tag{2}$$

*Vihje:*[1]

**Tehtävä 3** *Käyttäen tietoa, että on olemassa ei-mitallinen joukko. Osoita, että ulkomitta ei ole edes äärellis-täyadditiivinen, eli löytyy joukot* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *jotka ovat erillisiä,* $A \cap B = \emptyset$, *siten että*

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

*(Vihje:* [2]*)*

**Tehtävä 4 (Mitan konvergenssi ja Täysadditiivisuus)** *Joukkofunktion täysadditiivisuus on "sama asia" kuin sen "konvergenssi nousevien joukkojonojen suhteen":*
*Oletetaan, että* $\Gamma \subset P(X)$ *sigma-algebra ja* $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ *sellainen funktio jolla on seuraavat kolme ominaisuutta:*

*i)* $\mu(\emptyset) = 0$

*ii) Äärellinen täysadditiivisuus: Jos* $A_1, A_2, \ldots A_k$ *erillisiä, niin* $\mu(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$.

*iii) Kaikille nouseville joukkojonoille* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, *missä* $A_n \in \Gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *pätee*

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

*Osoita, että tällöin* $\mu$ *on mitta.*

[1] Tämä tehtävä on helppo, älä yritä mitään monimutkaista. Käytä määritelmiä ja monotonisuutta.
[2] Mitä Caratheodoryn ehto sanoo ei-mitallisesta joukosta?

**Tehtävä 5 (Monotonisen funktion mitallisuus)** *Olkoon funktio* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kasvava eli* $g(x) \leq g(y)$ *aina kun* $x \leq y$. *Osoita, että alkukuva* $f^{-1}[a, \infty)$ *on mitallinen joukko kaikilla* $a \in \mathbb{R}$. *(Eli funktio* $g$ *on mitallinen funktio.)*

**Tehtävä 6 (Mitallisen funktion karakterisaatio)** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}$ *ja* $f : A \to \mathbb{R}$. *Oletetaan, että alkukuva* $f^{-1}[q, \infty) = \{x \in A : f(x) \geq q\}$ *on mitallinen kaikilla* $q \in \mathbb{Q}$. *Osoita, että alkukuva* $f^{-1}[y, \infty)$ *on mitallinen joukko kaikilla* $y \in \mathbb{R}$ *(joten* $f$ *on mitallinen funktio).*