Mitta ja Integraali
Kesä 2017
3. tehtävät

Kolmen seuraavan tehtävän tarkoituksena on opettaa miten sekä mitallisia, että ei-mitallisia joukkoja voidaan approksimoida avoimilla, suljetuilla tai mitallisilla joukoilla. Mikäli luennolla ei ole ehditty käsittelemään materiaalin kappaletta 1.9, niin lue myös se.

Tehtävä 1 *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa avoin joukko $B_m \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset B_m$ ja*

$$m(B_m) \leq m^*(A) + \frac{1}{m}.$$

Osoita nyt äskeistä tietoa apuna käyttäen, että on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset B \quad ja \quad m(B) = m^*(A)$$

(Alkuosassa riittää tutkia ulkomitan ja Lebesguen peitteen määritelmää. Jälkiosassa otetaan numeroituva leikkaus...)

Tehtävä 2 *Olkoon A nyt mitallinen joukko ja lisäksi $m(A) < \infty$. Osoita tehtävää 1 apuna käyttäen, että kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko B siten, että $A \subset B$ ja*

$$m(B \setminus A) < \epsilon.$$

Tehtävä 3 *Osoita tehtävä 2 ilman oletusta $m(A) < \infty$.*
Päättele tästä komplementia käyttäen, että on myös olemassa suljettu joukko $C \subset A$ siten, että $m(A \setminus C) < \epsilon$.

Tehtävä 4 *Tämä tehtävä esittelee eräät hyödylliset operaatiot joukko-jonoille. Se tarjoaa myös erinomaista harjoitusta joukkomanipulaatioihin.*
Olkoon A_n avaruuden X osajoukko kaikilla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Tällöin muodostamme joukot

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k. \tag{1}$$

Näillä joukoilla on tulkinta, joka auttaa ymmärtämään, miksi ne ovat käyttökelpoisia: Osoita, että

A) $x \in \limsup_n A_n$ *jos ja vain jos "$x \in A_n$ äärettömän monella indeksillä n".*

B) $x \in \liminf_n A_n$ *jos ja vain jos "$x \in A_n$ jostakin $n = N$ lähtien (eli kun $n \geq N$)".*

Tehtävä 5 *Harjoittele edellisen tehtävän joukkojen käyttöä etsimällä* lim sup *ja* lim inf *erikoitapauksissa*

A) $A_n = (a, b)$ *kun n on parillinen ja $A_n = (c, d)$ kun n on pariton ja $a < b < c < d$.*

B) $A_n = (-1/n, 1]$ *kun* n *on parillinen ja* $A_n = [-1, 1/n)$ *kun* n *on pariton.*

Tehtävä 6 *Osoita , että jos joukko-jono on joko kasvava* ($A_n \subset A_{n+1}$) *tai vähenevä* ($A_n \supset A_{n+1}$)*, niin silloin pätee*

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n. \tag{2}$$

Osoita myös seuraavat perusominaisuudet.

C) $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$. *(Vihje: De Morgan.)*

D) $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

[Kurssin loppupuolella käytämme näitä joukkoja kun annamme intuitiivisen tulkinnan Dominoidun Konvergenssin lauseelle (integrointiteorian käytännöllisin lause).]