Mitta ja Integraali
Kesä 2017
2. tehtävät

Tehtävä 1 *Osoita kaksi erittäin hyödyllistä perusominaisuutta ulkomitalle (Näissä ei kannata käyttää ulkomitan määritelmää vaan materiaalin tuloksia):*

A) Numeroituva yhdiste nollaulkomittaisia joukkoja on nollaulkomittainen: Eli jos $m^*(A_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, *niin pätee* $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = 0$.

B) Jos $B \subset A$ *ja* $m^*(B) < \infty$, *niin pätee* $m^*(A \setminus B) \geq m^*(A) - m^*(B)$. *(Oletus* $m^*(B) < \infty$ *on tarpeellinen, jottei kävisi näin:* $\infty - \infty$. *Tee hyvin selväksi missä kohtaa todistusta käytät tätä oletusta.)*

Tehtävä 2 *Osoita, että seuraavien joukkojen* kolme*ulotteinen ulkomitta* m_3^* *on nolla.*

A) Kiekko $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < R^2\}$

B) Litteä taso $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

Tehtävä 3 (Ulkomitan translaatio-invarianssi) *Todista:*
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. *Silloin pätee* $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$.

Tehtävä 4 (Numeroituva joukko on nollamittainen) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *numeroituva. Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että* $m_n^*(A) = 0$.
(Tämän voi toki todistaa subadditiivisuudella ja tiedolla $m_n^*(\{x\}) = 0$, *mutta nyt harjoitellaan määritelmän käyttöä.)*

Tehtävä 5 (Mitallisuusharjoitus) *Olkoon joukko* E *Lebesgue-mitallinen ja joukko* A *nollaulkomittainen eli* $m^*(A) = 0$. *Perustele miksi yhdiste* $E \cup A$, *erotus* $E \setminus A$ *ja leikkaus* $E \cap A$ *ovat mitallisia.*

Tehtävä 6 (Harjoitus Caratheodoryn ehdolle) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mielivaltainen joukko ja olkoot* E *ja* F *Lebesgue-mitallisia joukkoja. Osoita Caratheodoryn ehtoa sopivalla testijoukolla käyttäen, että jos* E *ja* F *ovat* erillisiä, *eli* $E \cap F = \emptyset$, *niin pätee "täysadditiivisuus avaruudessa A":*

$$m^*((E \cap A) \cup (F \cap A)) = m^*(E \cap A) + m^*(F \cap A).$$

[Tehtävän sanoma on, että vaikka joukkojen $(E \cap A)$ *ja* $(F \cap A)$ *ei tarvitse olla mitallisia, niin täysadditiivisuus pätee silti tässä erikoistilanteessa. Vihje: Piirrä kuva, mieti Caratheodoryn ehdon tulkintaa, ja yritä sitä kautta keksiä lupaava testijoukko.]*