Mitta ja Integraali
Kesä 2017
1. tehtävät

1. Mittateoriassa tutkitaan minkälaisille joukoille voidaan määrätä ”mitta”. Tämän vuoksi on välttämätöntä hallita joukko-operaatiota ja pientä manipulointia.
”Sievennä” seuraavat joukot käyttäen täsmällisiä argumentteja. Esimerkiksi yhdisteen $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ sivennetty muoto on $\mathbb{R}$, ja leikkauksen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,\infty)$ on $[0,\infty)$.

A $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\infty)$. (Tämä osoittaa, että joukkojen ääretön leikkaus voi olla tyhjä, vaikka jokainen äärellinen osaleikkaus olisi jopa ”äärettömän suuri”.)

B $\bigcup\{[q,p] : q,p\in\mathbb{Q}, a<q<p<b\}$, missä $a<b$ ovat annettuja reaalilukuja.

C $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(n-\frac{1}{m},n+\frac{1}{m})$.

2. Olkoon $U\subset\mathbb{R}$ ja $x\in R$. Luodaan kätevät määritelmät $U+x := \{y+x : y\in U\}$ ja $U+V := \bigcup_{x\in V}(U+x)$. Osoita

A $[0,1]+(0,1)=(0,2)$

B $\mathbb{N}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}$

C $\mathbb{Q}+(0,1)=\mathbb{R}$

3. Tämä tehtävä osoittaa, että kuvaus ei yleisesti ”kunnioita” leikkaus-operaatiota. Alkukuva sen sijaan kunnioittaa, mikä tekee siitä mukavamman operaation mitta-teorian näkökulmasta, koska se säilyttää tiettyjen joukkoperheiden (sigma-algebrojen) rakenteen.
Olkoot X ja Y joukkoja, $f : X\to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_i\subset X,\ i\in I$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(V_i).$$

Osoita vielä, että inkluusio voi olla aito. (Vihje: tee leikkauksesta $\bigcap_{i\in I}V_i$ tyhjä.)
Vapaaehtoinen lisätehtävä: Osoita, että jos f on injektio niin silloin pätee yhtäsuuruus

$$f\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)=\bigcap_{i\in I}f(V_i). \tag{1}$$

4. Todista:

A Jos A on numeroituva ja $B\subset A$, niin B on numeroituva.

B Potenssijoukko $P(\mathbb{R})$ on ylinumeroituva.

5. Todista:

A $\mathbb{N}$:n äärellisten osajoukkojen perhe, eli $\{A\subset\mathbb{N} : A\,\textit{on äärellinen}\}$, on numeroituva.

B $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\{(x)_n :\ (x)_n\ \textit{on luonnollisten lukujen lukujono}\ \}$, eli lukujonojen joukko, on ylinumeroituva.

6. Seuraava esimerkki selittää miksi yleensä tutkitaan vain numeroituvia summia, eli indeksi joukoksi valitaan $\mathbb{N}$.
Olkoon I indeksijoukko (mahd. ylinumeroituva) ja $a_i\geq 0$ reaalilukuja. Osoita, että jos pätee

$$\sum_{i\in I}a_i<\infty, \tag{2}$$

niin silloin $\{i\in I : a_i>0\}$ on numeroituva. Vihje: [1]

[1] Tutki joukkoja $\{i\in I : a_i>1/n\}$.