# Mitta ja Integraali

Muistilista

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$:n Lebesgue:n ulkomitta $A$:sta on $m_n^*(A) := \inf\{\mathcal{S}(\mathcal{F}) : \mathcal{F}$ on $A$:n Lebesgue:n peite$\}$.

2. $\mathcal{F}$ on $A$:n Lebesgue:n peite jos se on numeroituva perhe avoimia $n$-välejä, siten että

$$A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

3. $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \sum_{I \in \mathcal{F}} l(I)$, missä $l((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.

4. Ulkomitalla on seuraavat ominaisuudet

   (a) $m^*(\varnothing) = 0$

   (b) Jos $A \subset B$ niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.

   (c)
$$m^* \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_n \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

5. Joukko $E$ on Lebesgue mitallinen jos

$$m_*(I \cap E) = m^*(I \cap E) \quad (I \, on \ n\text{-}väli)$$

6. Caratheodoryn ehto: $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

   mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

7. Funktio $f : A \to \dot{\mathbb{R}} (:= \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$ on mitallinen jos jokin seuraavista ehdoista pätee

   (a) $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([-\infty, a])$ on mitallinen;

   (b) $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([-\infty, a[)$ on mitallinen

   (c) $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}([a, \infty])$ on mitallinen

   (d) $\forall a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(]a, \infty])$ on mitallinen

   (e) jokaisen avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}$ alkukuva $f^{-1}(G)$ on mitallinen, ja $f^{-1}(\{-\infty\})$ ja $f^{-1}(\{\infty\})$ ovat mitallisia.

8. Vektoriarvoinen funktio $f : A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen jos jokaisen avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}^n$ alkukuva
$$f^{-1}(G) := \{x : f(x) \in G\} \text{ on mitallinen.}$$

9. Sanotaan että ominaisuus $P(x)$ pätee melkein kaikille (m.k.) $x \in E$ jos on olemassa $E' \subset E$ siten, että $m(E \setminus E') = 0$ ja kaikille $x \in E'$ pätee ominaisuus $P(x)$.

10. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to f$ on yksinkertainen jos sillä on esitys $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$, missä $0 \leq a_i < \infty$ ja joukot $A_i$ mitallisia.

11. Yksinkertaisen funktion $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ integraali on
$$I(f) := \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \quad I(f, E) := I(f\chi_E).$$

12. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen funktio. Tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $\phi_i \nearrow f$.

13. Jos $f \geq 0$ on mitallinen, niin sen Lebesgue integraali määritellään seuraavasti:
$$\int_E f := (R) \int_0^\infty m(f^{-1}[t, \infty])\, dt.$$
Se on yhtäpitävä tämän määritelmän kanssa:
$$\int f := \sup\{I(\phi) : \phi \leq f,\, \phi \text{ yksinkertainen}\} \quad \int_E f := \int f\chi_E.$$

14. Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$. $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ja $f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}$. $f = f^+ - f^-$ $|f| = f^+ + f^-$. $f$ on *integroituva* yli $E \subset A$ jos se on mitallinen ja $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin
$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

15. $f$ on integroituva yli $E$ jos ja vain jos se on mitallinen ja $\int_E |f| < \infty$.

16. Konvergenssilauseet:
    (a) MKL: olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$, $0 \leq f_i \leq f_{i+1}$ mitallisia. Tällöin
    $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i$$
    (b) Fatou: olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$, $0 \leq f_i$ mitallisia. Tällöin
    $$\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i \leq \liminf_{i\to\infty} \int_E f_i$$
    (c) DKL: olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $\exists \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ m.k. x. Jos löytyy *integroituva* $g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ siten, että $|f_i| \leq g$ kaikilla $i$, niin pätee
    $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i.$$