Mitta ja Integraali

Anssi Mirka[1]

[1]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen anssi.mirka@helsinki.fi

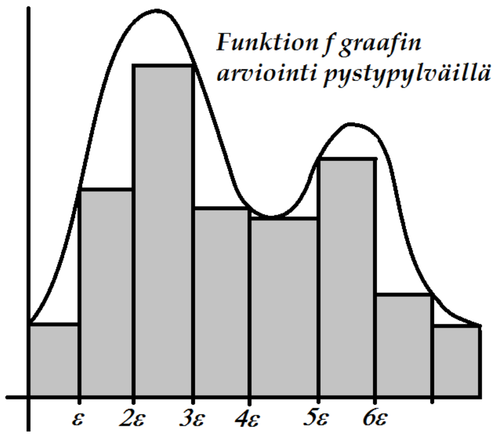
Contents

It would be so nice if something made sense for a change.

–Alice, *Alice in Wonderland*

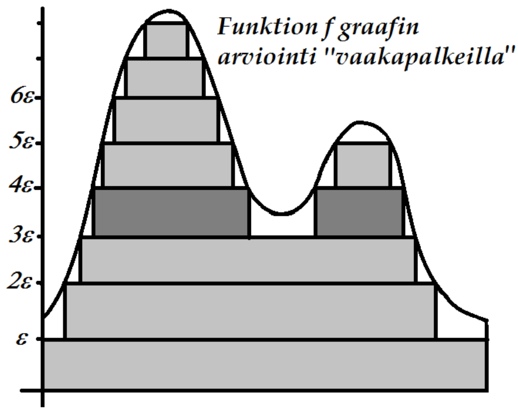
Esipuhe: Instrumentti nimeltä Integraali

Vuoteen 1904 asti integraali – tuo analyysin tehokkain työkalu taisteluparinsa derivaatan rinnalla – tarkoitti Riemann(-Darboux)-integraalia. Sen idean voi tiivistää seuraavaan kuvaan:



Jokaisella pystypylväällä on luonnollinen pinta-ala (kanta kertaa korkeus). Riemann-integraalin tavoite on arvioida graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen alaa (mikäli sellainen on) näiden pystypylväiden alojen summalla. Käytännön täsmällisessä tarkastelussa joutuu huolehtimaan matemaattisista yksityiskohdista, mutta idea on lopuksi äärimmäisen yksinkertainen.

Henri Lebesgue keksi kuitenkin kysyä: Miksei vaakapalkkeja? Eli mitä jos yritämmekin seuraavaa. Sen sijaan, että ”teemme jaon x-akselilla”, kokeilemmekin jakaa pystyakselin ε-pituisiin väleihin, jotka integroitavan funktion graafin avulla määräävät ”vaakapylväikön” seuraavasti:

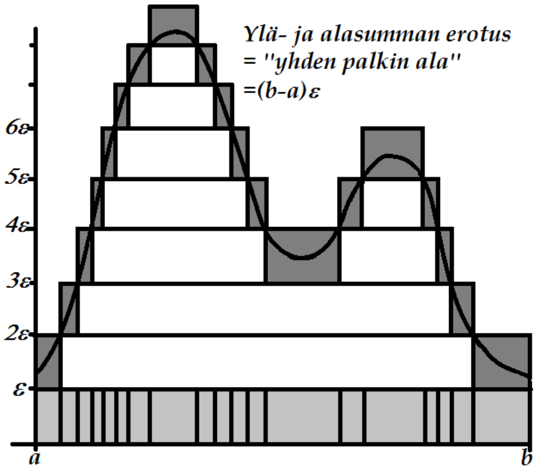


Huomaamme kuitenkin, että vaakapalkit eivät välttämättä ole yhtenäisiä vaan koostuvat useammasta ”osapalkista”. (Kuvan funktio on muuten harhaanjohtavan kesy; käytännössä vaakapalkki saattaa osittua äärettömän moneen osaan.) Törmäämme siis ensimmäiseen – *ja lopulta ainoaan* – haasteeseen: Miten määräämme alan mielivaltaiselle ”palkille”? Luonnollisesti haluaisimme edelleen soveltaa ”ala = kanta kertaa korkeus” -periaatetta. Koska korkeus ε on jo selvillä, kysymys palkin alasta palautuu ”kannan pituuden” määräämiseen.

Oletetaan, kokeillaksemme johtaako idea minnekään, että osaamme antaa pituuden $m(E)$ mille tahansa osajoukolle $E \subset \mathbb{R}$. Silloin voisimme antaa pinta-alan kaikille vaakapalkeille seuraavasti. Esimerkiksi kuvan tummemman ”palkin” kanta voidaan ilmaista alkukuvana $f^{-1}[4\varepsilon, \infty)$ (pisteet, joissa funktion "f arvo ylittää riman 4ε"). Näin ollen tumman vaakapalkin alan pitäisi olla $m(f^{-1}[4\varepsilon,\infty))\varepsilon$.

Muistetaan tässä vaiheessa, että Riemann-Darboux-integraalissa on toinenkin puoli: integroitavan funktion arviointi ylhäältä. Ilman sitä integraalin mielekkyys olisi kyseenalainen, sillä *mitä tahansa* funktiota f voi *aina* arvioida ylhäältä ja alhaalta vaakapalkeilta (eli muodostaa Darboux ylä- ja alaintegraalit $\overline{\int_a^b} f$ ja $\underline{\int_a^b} f$). Arviointi ei siis itsessään koskaan ole este. Mutta jotta f:llä olisi mielekäs integraali $\int_a^b f$, niin ylä- ja ala-arvioiden täytyy täsmätä. Tämä arvioiden yhtyminen on Riemann-Darboux-integroituvuuden määritelmä, ja haluaisimme myös vaakapalkeilla noudattaa samaa hyvin järkeenkäypää periaatetta.

Tarvitsemme siis ylä-arvion vaakapalkeilla. Tämä ei tuota sen enempää ongelmia kuin ala-arviokaan – itse asiassa meidän tarvitsee vain lisätä ε kaikkiin alapalkkeihin.



Lebesgue määritteli integroituvan funktion sellaiseksi, jolla ylä- ja ala-arvioiden erotus saadaa mielivaltaisen pieneksi. Periaate on siis täysin sama kuin Riemann-Darboux-integraalissa. Ainoa ero on, että käytämme vaakapalkkeja pystypalkkien sijasta. Kuitenkin tällä pienellä näkökulman vaihdoksella on yllättävän kauaskantoisia seurauksia.

Riemann-integraalissa ei ole helppo sanoa milloin ylä-ja alasummat saadaan mielivaltaisen lähelle toisiaan. Esimerkiksi jatkuvuus riittää, samoin monotonisuus, mutta eivät ole lähelläkään välttämättömiä. Kuten jo Riemann itse huomasi, on vaikea antaa täsmällistä karakterisaatiota Riemann-integroituvalle funktiolle. Pystypalkit eivät siis käyttäydy tässä suhteessa kovin nätistä. Toisin käy vaakapalkeilla...

Kuvassa näemme tummennettuna ylä- ja ala-vaakapalkistojen erotuksen. Funktio f on integroituva silloin kun tuon tummennetun alueen ala menee nollaan kun $\varepsilon \to 0$. Mutta nyt huomio! Jos tarkastelemme kuvaan "vasemmalta oikealle" huomaamme, että aina kun "yksi tumma palkki loppuu, toinen tumma palkki alkaa joko ε verran ylempänä tai alempana". Täten voimme tuoda kaikki erilliset tummat laatikot alas vierekkäin, jolloin niistä muodostuu yksi palkki jonka pituus on $b-a$ ja korkeus ε. Joten kun korkeus $\varepsilon \to 0$, niin tummien laatikoiken yhteen laskettu ala katoaa. Funktio f on siis *automaattisesti integroituva ilman mitään lisäehtoja*! (Vertaa taas tilannetta Riemann-integraaliin, jossa tarvitaan suhteellisen monimutkaisia lisäehtoja.)

Tämän ilmiön vuoksi vaakapalkki-integrointi (eli Lebesgue-integroiti) on niin tehokas ja helposti käytettävä. Meidän ei enää tarvitse murehtia lähestyvätkö ylä- ja ala-arviot toisiaan – ne tekevät sen automaattisesti. Ainoa ehto on, että kykenemme määräämään "pituuden" alkukuville $f^{-1}[y,\infty)$. Huomiomme keskittyy näin *mittaamisen ongelmaan*: jotta voisimme käyttää uutta metodiamme, meidän on opittava mittaamaan mahdollisimman monimutkaisia joukkoja. Meidän on luotava yleinen ”mittateoria”. Ja mitä tehokkaampi mittateoria, sitä yleisempi integrointiteoria.

On luultavasti liikaa toivottu (ja tämä aavistus osoittautuu oikeaksi), että voisimme antaa mielekkään mitan *kaikille* joukoille. ”Mitallisten joukkojen perhe” tulee olemaan jokin aito, mutta hämmästyttävän iso, osakokoelma $\mathbb{R}$:n osajoukkoja. Toisaalta heti kun olemme löytäneet (jonkin) kattavan kokoelman mitallisia joukkoja, voimme heti karakterisoida ”integroitavan[1] funktion” käsitteen: funktio f on integroituva (eli ylä- ja alaarviot täsmäävät), jos ja vain jos osaamme antaa mitan alkukuville $f^{-1}[y,\infty)$.

Lyhyesti: Lebesgue-integrointi perustuu (historiallisesti) äärimmäisen yksinkertaiseen ideaan käyttää integroinnissa vaakapalkeilla. Tämä lupaava idea toimii sitä paremmin, mitä useammalle osajoukolle osaamme antaa ”pituuden”; näin Lebesgue-integrointi nostaa mittateorian keskeiseen rooliin. Lopuksi vaakapalkkimetodi, toisin kuin pystypalkkimetodi, antaa automaattisesti sekä välttämättömän että riittävän ehdon funktiolle jota voi Lebesgue-integroida: integroitavan funktion f alkukuvien $f^{-1}[y,\infty)$ on oltava mitallisia.

Kurssin tarkoitus on saattaa ylläoleva käsienheiluttelu täsmälliseen muotoon (tämä oli Lebesguen varsinainen saavutus–muutkin olivat tulleet ajatelleeksi vaakapalkkeja). Oikeastaan ainoa aukko yllä on mitallisuuden käsite, jota tutkimme ensimmäiseksi. Sen jälkeen konstruoimme Lebesgue-integraalin oleellisesti ylläesitetyllä menetelmällä. Lopuksi demonstroimme teoriamme voimaa todistamalla tuloksia, joihin vanhanaikainen Riemann-integraali on auttamattoman riittämätön.

[1] Valitettavasti termi Lebesgue-integroituva on nykyään virallisesti varattu toiseen funktioanalyyttiseen tarkoitukseen.

0 Taustatietojen kertausta ja täydennystä

0.1 Käytännön joukko-oppia

Aivan aluksi on parasta hieman koota ja kerrata esitietoja. Hyvä perusrutiini helpottaa työtä myöhemmin ja auttaa keskittymään oleelliseen teorian rakennuksessa. Oleellisin uusi työkalu on numeroituvuuden käsite. Muun lukija voi halutessaan hypätä yli.

Olkoon X mikä tahansa joukko. Tällöin *X:n potenssijoukko* on

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$$

ja *X:n joukkoperhe* (tai *perhe/kokoelma X:n osajoukkoja*) on mikä tahansa $\mathcal{P}(X)$:n osajoukko

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X).$$

Perheen $\mathcal{F}$ *yhdiste* on

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \colon x \in A \ \underline{\text{jollakin}}\ A \in \mathcal{F}\}$$

ja *leikkaus* on

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \colon x \in A \ \underline{\text{kaikilla}}\ A \in \mathcal{F}\}.$$

Olkoon $\mathcal{A}$ jokin (indeksi)joukko ja oletetaan, että jokaista $\alpha \in \mathcal{A}$ vastaa yksikäsitteinen X:n osajoukko $V_\alpha \subset X$. (Toisin sanoen, $\alpha \mapsto V_\alpha$ on kuvaus $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$.) Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$$

on *X:n indeksöity joukkoperhe.*

Indeksöidyn perheen *yhdiste* on

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X \colon x \in V_\alpha \ \underline{\text{jollakin}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

ja vastaavasti *leikkaus* on

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X \colon x \in V_\alpha \ \underline{\text{kaikilla}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Merkitsemme myös

$$\bigcup_\alpha V_\alpha \quad \text{ja} \quad \bigcap_\alpha V_\alpha, \quad \text{jos } \mathcal{A} \text{ käy selville asiayhteydestä.}$$

Esimerkki 0.1.

1. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Voimme tulkita $\mathcal{F}$:n indeksöidyksi perheeksi käyttämällä $\mathcal{F}$:ää itseään indeksijoukkona. Toisin sanoen, jos $\alpha \in \mathcal{F}$ (jolloin α on X:n osajoukko), niin merkitään $V_\alpha = \alpha$. Tällöin $\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{F}\}$.

2. Mille tahansa joukolle X pätee

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}, \qquad \{x\} = \text{ yksiö.}$$

Usein indeksijoukkona on $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$, jolloin merkitään

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_{n} V_n,$$

ja vastaavasti

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_{n} V_n.$$

Merkinnät (V_n), $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ja $V_1, V_2, \dots$ tarkoittavat (joukkojen) *jonoja*.

Joukkojen $A, B \subset X$ *erotus* on

$$A \setminus B = \{x \in X \colon x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Joukon $B \subset X$ *komplementti* (X:n suhteen) on

$$B^c = X \setminus B.$$

Huomautus 0.2.

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Lause 0.3. *Olkoon $\{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ jokin X:n joukkoperhe. Tällöin pätee ns.* de Morganin lait*:*

$$\Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c \tag{0.1}$$

ja

$$\Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha} V_\alpha^c. \tag{0.2}$$

Olkoon $B \subset X$. Tällöin pätee ns. distributiiviset lait yhdisteelle ja leikkaukselle*:*

$$B \cap \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha}(B \cap V_\alpha) \tag{0.3}$$

ja

$$B \cup \Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha}(B \cup V_\alpha). \tag{0.4}$$

Todistus. (0.1):

$$x \in \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c \iff x \notin \bigcup_{\alpha} V_\alpha \iff \forall \alpha \colon x \notin V_\alpha \iff \forall \alpha \colon x \in V_\alpha^c \iff x \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c.$$

(0.2): Samoin.
(0.3):

$$\begin{aligned} x \in B \cap \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big) &\iff x \in B \text{ ja } x \in \bigcup_{\alpha} V_\alpha \iff x \in B \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \\ &\iff x \in B \cap V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff x \in \bigcup_{\alpha}(B \cap V_\alpha). \end{aligned}$$

(0.4): Samoin. □

Joukkoperheen yhdisteen/leikkauksen kuvat ja alkukuvat.

Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.

Joukon $A \subset X$ *kuva* (kuvauksessa f) on

$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}. \quad (\subset Y)$$

Merkitään myös lyhyemmin fA.

Joukon $B \subset Y$ *alkukuva* (kuvauksessa f) on

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Merkitään myös $f^{-1}B$. Käytämme myös merkintää

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}),$$

kun $y \in Y$. [<u>Huom.</u>: f:llä <u>ei</u> tarvitse olla käänteiskuvausta.]

Lause 0.4. *Olkoon $f\colon X \to Y$, $\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n joukkoperhe ja $\{W_\beta\colon \beta \in \mathcal{B}\}$ Y:n joukkoperhe. Silloin*

$$f\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) = \bigcup_\alpha fV_\alpha \tag{0.5}$$

$$f^{-1}\big(\bigcup_\beta W_\beta\big) = \bigcup_\beta f^{-1}W_\beta \tag{0.6}$$

$$f^{-1}\big(\bigcap_\beta W_\beta\big) = \bigcap_\beta f^{-1}W_\beta. \tag{0.7}$$

Todistus. (0.5):

$$\begin{aligned} y \in f\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big) &\iff y = f(x) \text{ ja } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff y = f(x) \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \\ &\iff y \in fV_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff y \in \bigcup_\alpha fV_\alpha. \end{aligned}$$

(0.6) ja (0.7): Samoin. □

Huomautus 0.5. Aina pätee

$$f\big(\bigcap_\alpha V_\alpha\big) \subset \bigcap_\alpha fV_\alpha,$$

mutta inkluusio <u>voi olla aito</u>. Yhtäsuuruus $f(\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha fV_\alpha$ pätee esimerkiksi, jos f on injektio.

0.2 Numeroituvat ja ylinumeroituvat joukot.

Numeroituvuus on erittäin tärkeä mittateoriassa!

Määritelmä 0.6. Joukko A on *numeroituva*, jos $A = \emptyset$ tai $\exists$ injektio $f\colon A \to \mathbb{N}$ ($\iff$ $\exists$ surjektio $g\colon \mathbb{N} \to A$).

A on *ylinumeroituva*, jos A ei ole numeroituva.

On helppo ymmärtää mistä tämä määritelmä tulee. Numerointi vastaa intuitiivisesti sitä, että käymme läpi jonkun joukon A alkiot yksitellen: $a \in A$ on "nolla", $a' \in A$ on "yksi", $a'' \in A$ on "kaksi", jne. Eli tavallaan esitämme joukon muodossa $A = \{a, a', a'', \ldots\} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Oleellisesti tämä läpikäyminen tuottaa surjektion $\mathbb{N} \to A$, $a_n \mapsto n$.

Huomautus 0.7.
1. A numeroituva $\iff$ A äärellinen (mukaanluettuna $\emptyset$) tai *numeroituvasti ääretön* (jolloin $\exists$ bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$).
2. $A \neq \emptyset$ numeroituva $\iff$ $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (toisto sallittu, joten A voi olla äärellinen).
3. A numeroituva, $B \subset A$ $\Rightarrow$ B numeroituva.

Lause 0.8. *Jos joukot A_n ovat numeroituvia $\forall n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ on numeroituva.}$$

(Eli "numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva".)

Todistus. Voi olettaa $A_n \neq \emptyset$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. A_n numeroituva $\Rightarrow$ $A_n = \{x_m(n) \colon m \in \mathbb{N}\}$. Määritellään kuvaus

$$g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n A_n, \quad g(n,m) = x_m(n).$$

Silloin g on surjektio $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n A_n$. Riittää löytää surjektio $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, koska silloin

$$g \circ h\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

on surjektio ja siten $\cup_n A_n$ numeroituva. Esimerkki surjektiosta $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\underset{=h(1)}{(1,1)} & & \underset{=h(3)}{(1,2)} & & \underset{=h(6)}{(1,3)} & & \underset{=h(10)}{(1,4)} & & \underset{=h(15)}{(1,5)} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\underset{=h(2)}{(2,1)} & & \underset{=h(5)}{(2,2)} & & \underset{=h(9)}{(2,3)} & & \underset{=h(14)}{(2,4)} & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
\underset{=h(4)}{(3,1)} & & \underset{=h(8)}{(3,2)} & & \underset{=h(13)}{(3,3)} & & & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\underset{=h(7)}{(4,1)} & & \underset{=h(12)}{(4,2)} & & & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & & \\
\underset{=h(11)}{(5,1)} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$\square$

Seuraus 0.9. Rationaalilukujen joukko

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$$

on numeroituva. Syy: Joukko

$$A_k = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ |m| \leq k, |n| \leq k\}$$

on äärellinen (ja siten numeroituva) $\forall k \in \mathbb{N}$. Lause 0.8 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ numeroituva. $\square$

Esimerkki 0.10. (Ylinumeroituva joukko). Väli $[0,1]$ (ja siten myös $\mathbb{R}$) on ylinumeroituva.

Idea: $x \in [0,1] \Rightarrow$ x:llä on desimaalikehitelmä

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

missä $a_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Voimme siis tavallaan ajatella reaalilukuja lukujonoina! Tämä huomio tarjoaa näkökulman muutoksen, joka on soveltuu erinomaisesti numeroituvuustarkasteluihin.

Todistus: Tärkeä vaihe: Vastaoletus: $[0,1]$ numeroituva, jolloin $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Pisteillä x_n on desimaalikehitelmät

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots \\
x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots \\
x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyt idea – idea, joka on yksi matematiikan historian kuuluisimpia – on rakentaa *uusi desimaalikehitelmä joka ei esiinny ylläolevassa listassa.* Temppu tottelee nimeä Cantorin diagonaaliargumentti:

"Lävistäjällä" on lukujono $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$, missä $a_n^{(n)}$ on x_n:n n:s desimaali. Jos valitsemme luvut b_n siten, että $b_n \neq a_n^{(n)}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin silloin $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, on desimaalikehitelmä, joka ei esiinny edellissä listassa! Merkillistä. Todistimme juuri, että kokonaislukujonoja – ja täten desimaalikehitelmiä – on ylinumeroituvan monta. Alkuperäistä väitettä varten meidän pitää vielä tarkistaa yksi pieni asia, jolla ei ole mitään syvällistä annettavaa tulokselle. Korostamme, että ylivoimaisesti tärkein ydinargumentti on jo esiintynyt.

Vähemmän tärkeä vaihe: Desimaalikehitelmä ei ole yksikäsitteinen! [Esim. $0,5999\ldots = 0,6000\ldots$ (nähdään esim. geometrisen sarjan avulla).] Meidän on siis varmistettava, että tämän uuden desimaalikehitelmän määräämä reaaliluku, $x := 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, ei vastaa mitään reaalilukua ylläolevassa listassa $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Tämä onnistuu helposti, kunhan huomaa, että kaksi desimaalikehitelmää, $0, c_1 c_2 \ldots$ ja $0, d_1 d_2 \ldots$ määrittelevät eri reaaliluvut jos $1 < |c_n - d_n| < 9$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. (Vakuuta itsesi tutkimalla esimerkkijonoa.) Saadaksemme konkreettisen esimerkin, voimme valita vaikka seuraavasti:

Määritellään luku $x \in [0,1]$ asettamalla $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, missä

$$b_n = \begin{cases} a_n^{(n)} + 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}, \\ a_n^{(n)} - 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{8, 9\}. \end{cases} \tag{0.8}$$

Luvun x n:s desimaali toteuttaa $|b_n - a_n^n| = 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, joten $x \neq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita, sillä $[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Siis $[0,1]$ on ylinumeroituva.

Huomio 1: Toistamme, että todistuksen ylivoimaisesti tärkein vaihe on alkuosan diagonaaliargumentti. Loppuosan yksikäsitteisyystarkastelut ovat sen rinnalla mitättömiä. Joten älä välitä jos ne eivät kiinnosta; tosin on hyvä tietää mistä on kysymys.

Huomio 2: Sama diagonaaliargumentti pätee mille tahansa numeroituvalle listalle lukujonoja. Mainitsemme erikseen tämän tärkeän sivuosuman: kokonaislukujonojen joukko on ylinumeroituva.

Sopimus. Jatkon kannalta on kätevää ottaa "∞" mukaan laskutoimituksiin seuraavilla konventioilla:

$$\begin{aligned}
&a + \infty = \infty + a = \infty, \qquad a \neq -\infty \\
&a - \infty = -\infty + a = -\infty, \qquad a \neq \infty \\
&\infty - \infty, \quad -\infty + \infty \quad \text{ei määr.} \\
&-(\infty) = -\infty, \qquad -(-\infty) = \infty
\end{aligned}$$

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases} \qquad \text{Huom! } 0 \cdot \infty = 0$$

$$(-\infty)a = a(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\infty \cdot \infty &= (-\infty)(-\infty) = \infty \\
(-\infty)\infty &= \infty(-\infty) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \\ \text{ei määr.}\ , & a = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{ei määr.}$$

Motivaatio: Käytännössä $\pm\infty$ "tarkoittaa" aina jotakin raja-arvo prosessia: $\pm\infty = \lim_{k\to\infty} y_k$, missä $y_k \in \mathbb{R}$. Kyseisiä raja-arvoja tulee vastaan esimerkiksi "mitattaessa" äärettömän suuria joukkoja. Kun tämän pitää mielessä, on helppo päätellä oikeat sopimukset: esim. "$0 \cdot \infty = 0 \cdot \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} 0 \cdot y_k = 0$".

Varoitus: Sopimusta $0 \cdot \infty = 0$ <u>ei</u> voi käyttää raja-arvojen $\lim_{k\to\infty} x_k y_k$ laskemisessa tapauksissa joissa myös "nolla korvataan raja-arvolla". Eli *ei saa päätellä, että* $\lim_{k\to\infty} x_k y_k = (\lim_{k\to\infty} x_k)(\lim_{k\to\infty} y$
$0 \cdot \infty = 0$. [2]

[2]Miksei? Kokeile valita $x_k := 1/k$ ja $y_k := k$.

0.3 Summeerausteoriaa

Muistutus: Jos $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on jono s.e. $a_j \geq 0\ \forall\ j$, niin joko

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \in \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j = +\infty.$$

Eli "positiivisten termien ääretön summa on aina olemassa", joko reaalilukuna tai äärettömänä. Syy: osasummat $\sum_{j=1}^{k} a_j$ muodostavat kasvavan jonon.

On hyödyllistä esitellä uusi lähestymistapa positiivistermisten "sarjojen" summaukseen: Olkoon $I \neq \emptyset$ mielivaltainen (mahdollisesti ylinumeroituva) indeksijoukko ja $a_i \geq 0\ \forall\ i \in I$. Kysymys: Mitä tarkoittaa

$$\sum_{\alpha\in I} a_i?$$

Vastaamme omaan kysymykseemme: Ensin, jos $J \subset I$ on äärellinen, niin voimme merkitä

$$S_J = \sum_{i\in J} a_i\,, \qquad S_\emptyset = 0.$$

Tämän jälkeen summa mielivaltaisen indeksijoukon yli määritellään supremumina kaikista äärellisistä osasummista:

Määritelmä 0.11.

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\{S_J \colon J \subset I \text{ äärellinen}\}.$$

On hyvä tarkistaa, että uusi määritelmä on yhteensopiva vanhan kanssa, kun indeksijoukko on $\mathbb{N}$:

Lemma 0.12.

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

eli "uusi" määritelmä yhtäpitävä aiemman (Analyysi I) kanssa.

Todistus. Merkitään $J_n = \{1,\ldots,n\}$, $\quad S = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \quad (= \sup\{S_J \colon J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen}\})$.

$$\big(S_{J_n}\big) \quad \text{nouseva jono} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{J_n} = S'$$
$$S_{J_n} \leq S \quad \Rightarrow \quad S' \leq S.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen} \quad &\Rightarrow \quad \exists\ n \in \mathbb{N} \ \text{ s.e. } \ J \subset J_n \\ &\Rightarrow \quad S_J \leq S_{J_n} \leq S' \\ &\Rightarrow \quad S \leq S' \quad (\text{ottamalla sup yli } \forall\ J). \end{aligned}$$

□

Seuraavassa sekä I että J ovat mielivaltaisia indeksijoukkoja. (Lisäksi merkitään lyhyemmin $a_{ij} = a_{(i,j)}$.)

Lemma 0.13.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Todistus. Merkitään S_{vas} = vasemman puoleisin summa, S_{kes} = keskimmäinen summa, ja S_{oik} = oikean puoleisin summa.

(a): Jos $\mathcal{A} \subset I \times J$ on äärellinen, niin $\exists$ äärelliset $I' \subset I,\ J' \subset J$ s.e. $\mathcal{A} \subset I' \times J'$

$$\Rightarrow \quad S_{\mathcal{A}} \le S_{I'\times J'} \overset{(*)}{=} \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'} a_{ij} \le \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij} \le S_{\text{kes}}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\text{vas}} \le S_{\text{kes}} \quad \text{(ottamalla sup yli } \forall\, \mathcal{A}).$$

[(∗): summassa $S_{I'\times J'}$ äärellisen monta termiä, joten voidaan summata missä järjestyksessä tahansa.]

(b): Olkoon $I' \subset I$ äärellinen ja $J_i' \subset J$ äärellinen $\forall\ i \in I'$. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{(i,j)\colon i \in I', j \in J_i'\}.$$

Silloin

$$S_{\text{vas}} \ge S_{\mathcal{A}} = \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J_i'} a_{ij}.$$

Otetaan ($\forall\ i \in I'$) sup yli äärellisten $J_i' \subset J$

$$S_{\text{vas}} \ge \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij}$$

$$\text{sup yli äärellisten } I' \subset I \quad \Rightarrow \quad S_{\text{vas}} \ge S_{\text{kes}}.$$

Samoin $S_{\text{vas}} = S_{\text{oik}}$. □

Korollari 0.14.

$$\sum_{(i,j)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in \mathbb{N}}\sum_{j\in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in \mathbb{N}}\sum_{i\in \mathbb{N}} a_{ij}\,.$$

0.4 Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ kpl}} \quad \text{karteesinen tulo}$$

Alkoita kutsutaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi*.

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n.$$

Algebrallinen rakenne.
Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *summa* on

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_x) \in \mathbb{R}^n.$$

Reaaliluvun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *tulo* on

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nollavektori

$$0 = \bar{0} = (0, \ldots, 0).$$

Pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *vastavektori* (vastinpiste)

$$-x = (-1)x = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *erotus* on

$$x - y = x + (-y).$$

$\mathbb{R}^n$:ssä summa ja reaaliluvulla kertominen toteuttavat *vektoriavaruuden* ehdot (Lin.alg.I), esim.

$$x + y = y + x, \quad x + 0 = 0 + x = x,$$
$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \text{jne}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *sisätulo* on

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i \right)^{1/2} \qquad x\text{:n } \textit{normi}.$$

Euklidinen etäisyys $\mathbb{R}^n$:ssä.
Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *etäisyys* on

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Usein merktään $d(x, y) = |x - y|$. Tällöin d on *metriikka* $\mathbb{R}^n$:ssä, ts. kuvaus $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toteuttaa (metriikan) ehdot:

$$d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \text{(kolmioepäyht., } \triangle\text{-ey).}$$

Avoimet ja suljetut joukot $\mathbb{R}^n$:ssä. (Vektorianalyysi, Topo I)

Euklidinen metriikka d määrää $\mathbb{R}^n$:ään avoimet ja suljetut joukot (ja siten $\mathbb{R}^n$:n topologian) seuraavasti:

Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

on *avoin* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula* (engl. "ball") ja

$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

on (x-keskinen, r-säteinen) *pallo* (tai *pallokuori*) (engl. "sphere"). Vastaavasti

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \le r\}$$

on *suljettu* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula*.

Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos $\forall x \in V \ \exists\ r = r(x) > 0$ s.e. $B(x,r) \subset V$.

Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos $\mathbb{R}^n \setminus V$ on avoin.

Esimerkki 0.15.

1. $B(x,r)$ on avoin $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ($\triangle$-ey, ks. yo. kuva).
2. Suljettu kuula $\bar{B}(x,r)$ on suljettu joukko.
3. $\mathbb{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja.
4. Puoliavoin väli, esim. $[0,1)$, ei ole avoin eikä suljettu.

Huomautus 0.16. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *sulkeuma* on

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ tai } x \text{ on } A\text{:n kasautumispiste}\}.$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste, jos $\forall r > 0\ B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. $\mathbb{R}^n$:ssä pätee $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$.

<u>Varoitus.</u> Joskus kuulaa $B(x,r)$ kutsutaan myös palloksi, jolloin $S(x,r)$:ää on kutsuttava pallokuoreksi.

Huomautus 0.17. Jos (X,d) on *metrinen avaruus*, ts. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ toteuttaa metriikan ehdot, niin voidaan määritellä X:n avoimet ja suljetut joukot (metriikan d suhteen) kuten edellä korvaamalla $|y - x|$ metriikalla $d(x,y)$.

Seuraava tulos pätee yleisesti:

Lause 0.18. *Olkoon $\mathcal{A}$ mikä tahansa indeksijoukko. Silloin*

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ avoin;} \tag{0.9}$$

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ suljettu;} \tag{0.10}$$

(0.11) $$V_1,\dots,V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ avoin} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} V_j \textit{ avoin;}$$

(0.12) $$V_1,\dots,V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ suljettu} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} V_j \textit{ suljettu.}$$

Todistus. (Topo I) (0.9):

$$x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \text{ s.e. } x \in V_{\alpha_0},$$
$$V_{\alpha_0} \text{ avoin } \Rightarrow \exists \text{ avoin kuula } B(x,r) \subset V_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha.$$

(0.10):

$$\begin{aligned} V_\alpha \quad \text{suljettu } \forall\, \alpha \;&\Rightarrow\; V_\alpha^c \quad \text{avoin } \forall\, \alpha \\ \overset{(0.9)}{\Longrightarrow} \quad \bigcup_\alpha V_\alpha^c &\overset{\text{de Morg.}}{=} \Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big)^c \quad \text{avoin} \\ \Rightarrow \bigcap_\alpha V_\alpha &\quad \text{suljettu.} \end{aligned}$$

(0.11) ja (0.12): (HT). □

Huomautus 0.19.

$$V_j \text{ avoin } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ avoin},$$
$$V_j \text{ suljettu } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ suljettu.} \quad \text{(HT)}$$

Osa I: Mitta

1 Lebesguen mitta $\mathbb{R}^n$:ssä

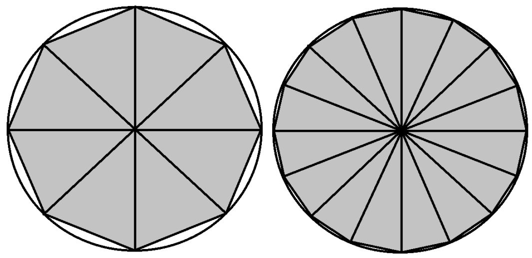
1.1 Mittauksen filosofiaa

Miksi (yksikkö)ympyrällä on pinta-ala? Siksikö, että voimme laskea integraalin

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi?$$

Ei. Integraalikaava vain kertoo, mikä kyseinen ala luultavasti on mikäli se on olemassa. Mutta onko se olemassa? Toisin sanoen, miksi on mielekästä kutsua jotakin reaalilukua ympyrän ”alaksi”? Senkö vuoksi, että jokin integraali sattuu tuottamaan sen tulokseksi? Meidän on tutkittava käsitystämme alan luonteesta hieman huolellisemmin.

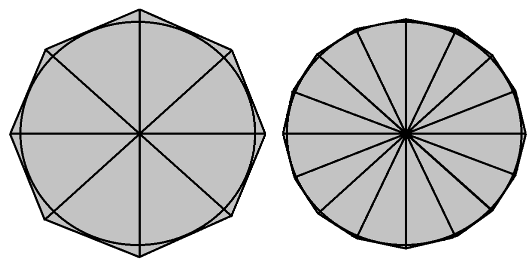
Lähempänä hyväksyttävää vastausta on toinen, alkeellisempi, metodi määrittää ympyrän pinta-ala: piirtämällä sen sisään monikulmioita.



Kun sisämonikulmioon ”lisää kulmia” se näyttäisi ”lähestyvän ympyrää”. Samalla monikulmion ala lähestyy piitä [3]. Täten tekisi mieli sanoa, että ympyrällä on pinta-ala, pii. Mutta nojaammeko me liikaa visioomme siitä, että ”monikulmio lähestyy ympyrää”? Lähestyykö se oikeasti?

Jos olemme aivan tarkkoja, niin tarkkaan ottaen edellinen perustely sisämonikulmioilla osoitti, että *jos* ympyrällä on ala, se on *vähintään* pii. Tämä argumentti perustuu luonnolliseen vaatimukseemme pinta-alan ”monotonisuudesta”: emme pidä mielekkäänä käsitettä, jossa suuremmalla joukolla voi olla pienempi ala.

Näin ollen meidän kannataakin arvioida ympyrää myös ulkoa päin:



[3] Miksi sitten monikulmiolla on pinta-ala? Se koostuu äärellisen monesta erillisestä kolmioista, joten jos kolmioilla on mielekäs ”ala”, niin silloin luontevaa sanoa, että alojen summa on monikulmion ala. Kolmioiden ala puolestaan on olemassa, sillä on helppo perustella, että se on puolet erään nelikulmion alasta. Ja nelikulmioilla yksinkertaisesti on ala, eikö olekin? Matematiikan perusteita luodessa täytyy aina lopulta vain päättää, että ”tämä on riittävän selvää”.

Identtinen päättely ulkomonikulmioilla kertoo meille, että *jos* ympyrällä on pinta-ala, niin se on *korkeintaan* ulkoarvioiden alaraja, joka on jälleen pii. Eli ulkoarvioiden alaraja on sama kuin sisäarvioiden yläraja!

Mitä voimme päätellä? Ainakin sen, että *ainoa* luku joka mahdollisesti voi käydä ympyrän mielekkääksi pinta-alaksi on tuo yhteinen raja, pii. Mutta älä keskity itse reaalilukuun pii vaan siihen, että raja-arvot ovat yhtenevät. Eikö tuo arvioiden täsmääminen nimenomaan tarjoa hyvän perustelun koko pinta-alan olemassaololle? Eikö juuri se oikeuta meidät kutsumaan piitä ympyrän pinta-alaksi? Pohdi asiaa...

Valinta on sinun

Pinta-ala/tilavuus/pituus ei ole ennalta annettu totuus. Matematiikka ei tarjoa tyhjästä vastauksia kysymyksiin "onko ympyrällä pinta-ala" tai "onko $\mathbb{Q}$:lla pituus?" Ei edes peruskysymykseen "mikä on neliön pinta-ala"? Meidän on itse tehtävä aloite. Jos olemme sitä mieltä, että edes neliölle ei löydy sopivaa reaalilukua jota sopisi kutsua sen "alaksi", niin matematiikalla ei ole valintaamme vastaansanomista. Mutta, jos katsomme sopivaksi määrätä neliöiden $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ aloiksi $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$, ja sen jälkeen vielä hyväksymme jonkin yleisen pelisäännön kuten: "jos kahdella erillisellä joukolla on alat A ja B niin silloin niiden yhdisteellä on myös ala, $A + B$ ", niin tämän jälkeen matematiikka ja logiikka väistämättä sanoo, että monilla muillakin joukoilla on pinta-ala. Jos intuitiomme vielä lisäksi kannustaa meitä lisäämään pelisääntöihin esimerkiksi ympyrän tapauksessa ehdotetun "kuristusperiaatteen", niin silloin meidän on loogista hyväksyä myös ympyrän pinta-alan olemassaolo.

Tämän kappaleen ei ole tarkoitus ohjata valitsemaan tiettyjä pelisääntöjä, vaan auttaa ymmärtämään, että me itse saamme määrätä ne juuri niinkuin oma intuitiomme (tai seikkailunhalumme) sanelee. Matematiikka vain ohjaa meitä laskuissa, kuten ympyrän sisä- ja ulkoarvioiden selvittämisessä.

Jos muuten olet tottunut käyttämään Riemann-integraalia, olet jo hyväksynyt erään muodon kuristusperiaatteesta: funktio on *määritelmän* mukaan integroituva, jos sen yläintegraali (infimum yläsummista) ja alaintegraali (supremum alasummista) ovat samat. Visuaalisesti tämä tarkoittaa graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen ulko- ja sisäapproksimaatioita hyvin erityisillä monikulmioilla: äärellisillä pylväsyhdistelmillä. Eli, kyseessä on täsmälleen sama kuristusperiaate kuin ympyrän tapauksessa.

Viimeiseksi kysymys toiseen suuntaan: Mitä jos olisi käynyt ilmi, että ympyrän tapauksessa arviot eriävät: ulkoarvio $>$ sisäarvio? Uskaltaisitko sanoa, että ympyrällä on ala? Tai mitä jos Riemann-integraalin tapauksessa yläintegraali $>$ alaintegraali? Virallisen määritelmän mukaan funktio *ei* tällöin ole integroituva. Mutta mitä jos arvioinneissamme onkin parannettavaa? Mitä jos olemme rohkeampia ja hyväksymme uusia pelisääntöjä? Silloin saatamme saada tarkemmat sisä- ja ulkoarviot, jotka voivat täsmätä–eli enemmän mitallisia joukkoja.

Äärellisen tuolle puolen

Usko tai älä, mutta ympyräesimerkki sisältää jo koko mittateorian perusidean. Periaatteessa tällä kurssilla ei käytetä mitään monimutkaisempaa strategiaa. Ainoa pieni muutos on kuristusperiaatteen laajennus. Mutta vaikka käytännön seuraukset ovat valtavat, niin kannattaa pitää mielessä, että periaate pysyy samana.

Kuten olemme nähneet (ympyrässä ja Riemann-integraalissa), kuristusperiaate on kriittinen askel uusien "mitallisten" joukkojen löytämiseen. Esitetyt kuristukset ovat toistaiseksi olleet varovaisen yksinkertaista muotoa. Ympyrän tapauksessa esiintyi äärellisiä yhdisteitä kolmioista, ja Riemann-integraalissa äärellisiä pylväskokoelmia. Äärellistä ja äärellistä... Miksemme käyttäisi kuristukseen monimutkaisempia apujoukkoja, kunhan pidämme huolen, että arviot varmasti "pysyvät intuition turvallisella puolella"?

Erityisesti, miksemme käyttäisi *numeroituvia* kokoelmia yksinkertaisia joukkoa kuten välejä, neliöitä ja kuutioita? Jos esimerkiksi $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ on jono *erillisiä* välejä, niin eikö ole luonnollista antaa niiden yhdisteelle "mitaksi" [4]

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \in [0, \infty]?$$

Oletamme, että on. Tämän jälkeen näitä uusia "mitallisia" joukkoja voi puolestaan käyttää muiden joukkojen arvioimiseen. Näin konstruoitu "laajennettu kuristusperiaate" on merkittävästi tehokkaampi, kuten kurssi tulee tekemään selväksi.

Entäs jos Riemann-integraalissa antaa luvan käyttää *numeroituvia* pylväs-yhdistelmiä? Sopivasti tulkittuna, vaikkei sitä kurssilla osoitetakaan, näin päätyy itse asiassa suoraan Lebesgue-integraaliin. Ei kuitenkaan mennä asioiden edelle; sitä paitsi tällä kurssilla lähestymme Lebesgue-integraalia eri suunnasta (muista esipuhe). Tarkoitus on vain korostaa, että Lebesgue-integraali ei monessa mielessä eroa paljoa esi-isästään.

Joten siinä se suuri moderni mullistus: Laajennetaan kuristusperiaatetta sallimalla "numeroituvat monikulmiot". Loppu on matemaattista pyöritystä. Yksityiskohdat tarjoavat haastetta, mutta pohjimmainen idea on idioottimaisen yksinkertainen.

1.2 Lebesguen ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä

Lähtökohta: N-välit ja Geometrinen mitta

Lähtökohtamme on yhtä minimaalinen kuin johdannossa. Ainoat asiat jotka otamme intuition pohjalta "mitallisiksi" ovat "n-ulotteiset kuutiot". Ensin yhdessä ulottuvuudessa: jos $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu väli, niin sen pituus on

$$\ell(I) = b - a.$$

Samoin jos I on suljettu tai puoliavoin. Vastaavasti korkeammissa ulottuvuuksissa kutsumme joukkoa $I \subset \mathbb{R}^n$ *n-väliksi*, jos se on muotoa

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli (joko avoin, suljettu tai puoliavoin).

I on avoin (vastaavasti suljettu) n-väli, jos jokainen I_j on avoin (vastaavasti suljettu).

Olkoot I_j:n päätepisteet a_j, b_j; $a_j < b_j$. Silloin I:n *geometrinen mitta* on

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

($n = 1$ pituus, $n = 2$ pinta-ala, $n = 3$ tilavuus). Merkitään $\ell(\emptyset) = 0$.

Arviointi ulkoa: Lebesguen peite ja Ulkomitta

Olemme luoneet perustan: rakennuspalikoina toimivat n-välit, ja "proto-mittana" geometrinen mitta. Näiden avulla voimme muotoilla tavan approksimoida mitä tahansa joukkoa ulkoa.

[4] Itseasiassa, meidän riittää hyväksy näemmäisesti heikompi oletus, että yhdisteen $\cup_n(a_n, b_n)$ pituus on *korkeintaan* summa $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Yläarviointia varten haluamme peittää A:n joukolla, jonka ”tiedämme olevan mitallinen”, tai jonka mitalle osaamme sanoa ylärajan. Idea joka esiintyi edellä ympyrän tapauksessa, oli käyttää äärellisiä yhdisteitä n-väleistä. Näin päädyttäisiin niin kutsuttuun Jordanin ulkomittaan ja klassiseen mittateoriaan. Nyt kokeilemme kuitenkin Lebesguen rohkeampaa ideaa.

Tarkastellaan *A:n numeroituvia avoimia peitteitä.* Olkoon perhe

$$\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\},$$

numeroituva (mahdollisesti siis äärellinen) kokoelma avoimia n-välejä siten, että

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Tällöin sanomme, että $\mathcal{F}$ on A:n *Lebesguen peite*. (Oikeastaan välien avoimuus ei ole oleellista. Myöhemmin osoitetaan, että myös suljetut n-välit kelpaavat.)

Nyt yhdisteen $\cup_k I_k$ (mahdollisen) mitan mikä tahansa yläraja on luonnollisesti yläraja myös joukon A *mahdolliselle* mitalle. Koska peitteen alkioilla on mahdollisesti jopa päällekäisyyksiä, on turvallista ”olettaa”, että n-välien geometristen mittojen summa

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \quad 0 \leq S(\mathcal{F}) \leq +\infty,$$

tarjoaa yläarvion yhdisteen $\cup_k I_k$, ja täten joukon A, mahdolliselle mitalle.

Eli jokainen joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F}$ tarjoaa ylärajan $S(\mathcal{F})$. *Toisaalta ylärajojen infimum on aina yläraja.* Näin ollen pääsemme muotoilemaan ”tarkimman yläarvion” käsitteen:

Määritelmä 1.1 (Ulkomitta)**.** Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *n-ulotteinen (Lebesguen) ulkomitta* on

$$\boxed{m_n^*(A) = \inf\left\{S(\mathcal{F})\colon\ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\right\}.}$$

Ideana on, että *jos* joukolla A on mielekäs ”mitta”, voi tuo mitta olla korkeintaan $m_n^*(A)$.

Huomautus 1.2.

1. Merkitään $J_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x_j| < k \ \forall j\}$ (avoin n-väli). Selvästi

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

joten aina on olemassa avoimia peitteitä $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$ (ja inf on siten olemassa).

2. Ulkomitta $m_n(A)$ riippuu (tietenkin) dimensiosta n. Jos n on selvä asiayhteydestä, niin merkitsemme lyhyemmin $m^*(A) = m_n^*(A)$.

3. Suoraan infimumin määritelmästä seuraa: Jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy jokin A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, siten, että

$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

(Sallitaan $m^*(A) = +\infty$.) Infimumin määritelmä ei tarkoita, että (aina) olisi mahdollista löytää A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, jolla $m_n^*(A) = S(\mathcal{F})$.

4. Siis: $A \mapsto m^*(A)$ on kuvaus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, erityisesti m^* on määritelty koko $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:ssä. Eli riippumatta joukon A ”mitallisuudesta”, sen *mahdolliselle* mitalle voidaan aina antaa yläraja $m^*(A)$. Vertaa tilannetta Riemann-integraaliin: mille tahansa funktiolle, integroituva tai ei, voi määritellä *ylä*-integraalin.

Huomautus 1.3 (Lebesguen peite ei-avoimilla n-väleillä)**.** Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ ja $J_1, J_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia (suljettuja/avoimia/puoliavoimia) n-välejä s.e. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. (Eli $\{J_1, J_2 \ldots\}$ on A:n "Lebesguen peite") Jokaisella i on olemassa avoin n-väli $I_i \supset J_i$ s.e. $\ell(I_i) < \ell(J_i) + \varepsilon/2^i$. Nyt $\{I_1, I_2 \ldots\}$ on A:n (avoin) Lebesguen peite, joten $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) + \varepsilon$. (Muista geometrinen sarja.) Tästä seuraa, että

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,\ J_i \text{ mielivaltainen } n\text{-väli}\Big\}.$$

Keskeytetään teorian rakennus hetkeksi, jotta saamme paremman tuntuman ulkomitasta.

Esimerkki 1.4. Olkoon $n = 2$ ja olkoon $A = \{(x, 0) \colon a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ (jana tasossa).
<u>Väite:</u> $m_2^*(A) = 0$.
<u>Todistus.</u> Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $I_\varepsilon = (a-1, b+1) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ avoin 2-väli.

$$A \subset I_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq m_2^*(A) \leq \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

joten $m_2^*(A) = 0$.

Seuraava tekee selväksi, että ulkomitta saattaa käyttäytyä varsin epäintuitiivisesti. Kiinnitä erityistä huomiota tekniikkaan, jolla epsilon jaetaan äärettömän moneen vielä pienempään osaan: $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n$. Tämä "$\varepsilon/2^n$-temppu" on keskeinen useissa mittateorian todistuksissa.

Esimerkki 1.5 (Harnack (1885))**.** Tarkastellaan rationaalilukuja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
<u>Väite:</u> $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
<u>Todistus.</u> $\mathbb{Q}$ numeroituva, joten $\mathbb{Q} = \{q_j \colon j \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Jokaisella $j \in \mathbb{N}$, olkoon

$$I_j = \big(q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\big) \subset \mathbb{R}$$

avoin väli. Sen pituus on $\ell(I_j) = 2\varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$. Jokainen rationaaliluku q_j kuuluu nyt väliin I_j, joten pätee $\mathbb{Q} \subset \bigcup_j I_j$. Tämä tarkoittaa, että $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$ on $\mathbb{Q}$:n Lebesguen peite. Näin ollen ulkomitan määritelmästä seuraa, että

$$m_1^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon.$$

Mutta ε oli mielivaltainen, joten $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Esimerkki 1.6. Yleisemmin, jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin $m_n^*(A) = 0$. (Todistus kuten edellä.)

Huomio: Siispä, tietyssä mielessä, numeroituvat joukot ovat "pieniä". Huomaa, että tarvitsemme *äärettömiä* Lebesguen peitteitä. Jos meillä olisi lupa käyttää vain äärellisiä kokoelmia välejä, niin silloin joukon $\mathbb{Q}$ "ulkomitta" olisikin ääretön!

Historiaa: Tämä ilmiö huomattiin ennen kuin mittateoria oli löytänyt oikean muotonsa. Kesti aikansa ennen kuin matemaatikot olivat valmiita hyväksymään esimerkiksi rationaalilukujoukon mitallisuuden: vaikka $\mathbb{Q}$ nähtiin edellisessä mielessä melko "olemattomana" joukkona, sille ei haluttu "myöntää" varsinaista "mittaa" nolla. (Mieti missä mielessä $\mathbb{Q}$ on sinusta mitallinen.)

Kysymyksiä: Tarkastele edellistä todistusta. Koska jokaisen reaaliluvun vierestä löytyy rationaalilukuja äärettömän läheltä, ja jokainen rationaaliluku on "piiritetty" avoimella välilllä, niin eikö jokainen reaaliluku silloin kuulu johonkin peitteen väleistä? Eli eikö kyseessä ole samalla koko $\mathbb{R}$:n peite?? Päteekö $m_1^*(\mathbb{R}) = 0$???

Esimerkki 1.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu* joukko, ts. $\exists R > 0$ s.e. $A \subset B(0,R)$. Silloin $A \subset I$, missä

$$I = (-R,R) \overset{n \text{ kpl}}{\times \cdots \times} (-R,R) \quad \text{avoin } n\text{-väli.}$$

Saadaan arvio

$$m^*(A) \le \ell(I) = (2R)^n.$$

Eli rajoitetun joukon ulkomitta on äärellinen. Kuulostaa järkevältä.

Lebesguen ulkomitan intuitiivisia perusominaisuuksia.

Koska ulkomitan on tarkoitus toimittaa "ulkoapproksimaation" virkaa, toivoisimme siltä tiettyjä intuitiivisia ominaisuuksia. Kääntäen: jos ulkomitta ei toteuttaisi tiettyjä perusvaatimuksia, se tuskin soveltuisi mittateoriamme rakennuskappaleeksi. Tässä muutama hyvin luonnollinen ominaisuus:

Lause 1.8. *(1)* $m_n^*(\emptyset) = 0$;

Tulkinta: Tyhjän joukon (mahdollinen) mitta on korkeintaan 0.

(2) "monotonisuus"*:* $A \subset B \Rightarrow m_n^*(A) \le m_n^*(B)$;

Tulkinta: Jos $A \subset B$ ja B:n (mahdollinen) mitta on korkeintaa $m_n^*(B)$, niin myös A:n (mahdollinen) mitta on korkeintaan $m_n^*(B)$.

(3) "subadditiivisuus"*:* $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ *jono joukkoja* $\Rightarrow$

$$m_n^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j).$$

Tulkinta: Yhdisteen $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mitta ei voi olla suurempi kuin $\sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j)$.

Huomautus 1.9. (3) pätee myös äärelliselle yhdisteelle $\cup_{j=1}^{k} A_j$ (valitaan $A_{k+1} = \cdots = \emptyset$).

Lauseen 1.8 todistus

(1): Selvä.

(2): Ydinidea: "Jokainen joukon B Lebesguen peite on samalla joukon A Lebesguen peite".

Todistus: Olkoon $\mathcal{F}$ joukon B Lebesguen peite. Silloin voimme päätellä:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \text{ on myös } A\text{:n Lebesguen peite} \quad \overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \le S(\mathcal{F}).$$

Otetaan inf yli kaikkien B:n Lebesguen peitteiden $\quad \Rightarrow \quad m_n^*(A) \le m_n^*(B)$.

(3): Nyt, ihan vain määritelmän mukaan, jokaisella j voidaan mitä tahansa $\varepsilon_j > 0$ kohti valita A_j:n Lebesguen peite $\mathcal{F}_j = \{I_{j1}, I_{j2} \ldots\}$ siten, että

$$S(\mathcal{F}_j) \le m_n^*(A_j) + \varepsilon_j.$$

Meidän on nyt tämän tiedon avulla osoitettava, että mielivaltaisella $\varepsilon > 0$ löydämme unionin $\cup_j A_j$ Lebesguen peitteen $\mathcal{F}$ siten, että $S(\mathcal{F}) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \varepsilon$.

Ensiksi huomataan, että peitteiden yhdiste $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{F}_j = \{I_{jk} \colon j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ on yhdisteen $\cup_j A_j$ (Lebesguen) peite. Sen jälkeen suoraviivainen arviointi,

$$m_n^*(\cup_j A_j) \overset{\text{määr.}}{\leq} S(\mathcal{F}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j,$$

osoittaa, että meidän pitää vain valita ε_j siten, että $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \leq \varepsilon$. Esimerkiksi $\varepsilon_j := \varepsilon 2^{-j}$ käy hyvin.

$\square$

Huomautus 1.10. Subadditiivisuus <u>ei</u> (yleensä) päde muodossa

$$m_n^*\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \leq \sum_{i \in I} m_n^*(A_i), \tag{1.13}$$

missä $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, ja I on *ylinumeroituva* indeksijoukko. <u>"Syy"</u>: Mikä tahansa joukko voidaan esittää alkioidensa yksiöinä. Esimerkiksi:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\}, \quad m_n^*(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Jos (1.13) pätisi, niin

$$m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^*\big(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\}\big) \overset{(1.13)}{\leq} \sum_{x \in \mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0.$$

Toisaalta myöhemmin todetaan, että $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$. <u>RR</u> (= "ristiriita") eli (1.13) ei päde!

Geometrisella mitalla on seuraavat intuitiiviset ominaisuudet $\ell(I + x) = \ell(I)$, missä $x \in \mathbb{R}^n$, ja $\ell(rI) = r^n \ell(I)$, missä $r > 0$. Samoin tuntuisi luontevalta, että jos joukon A mitta on korkeintaan $m_n^*(A)$, niin "samannäköisen" joukon $A + x$ mitta on korkeintaan $m_n^*(A)$, ja toisin päin, mistä seuraisi $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$. Tämä todellakin pitää paikkansa, kuten myös vastaava skaalausominaisuus.

Lause 1.11. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Silloin*

$$m_n^*(A + x) = m_n^*(A) \tag{1.14}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä $A + x = \{y + x \colon y \in A\}$;

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A), \tag{1.15}$$

kun $t > 0$, missä $tA = \{ty \colon y \in A\}$.

Todistus. Siirtoinvarianttius (1.14) jätetään harjoitustehtäväksi.

Todistetaan skaalausominaisuus (1.15). Oletetaan heti, että $t > 0$, koska muuten väite on triviaali.

<u>Ydinajatus:</u> Todistuksen ideassa on vain kaksi elementtiä. Ensimmäinen on huomio $\ell(tI) = t^n \ell(I)$, joka seuraa geometrisen mitan määritelmästä. Toinen elementti on seuraava yksi yhteen vastaavuus: Perhe $t\mathcal{F} := \{tI : I \in \mathcal{F}\}$ on tA:n Lebesguen peite jos ja vain jos $\mathcal{F} = \{I : I \in \mathcal{F}\}$ on

A:n Lebesguen peite.

Yksityiskohtainen todistus: Olkoon $\mathcal{F}$ joukon A Lebesguen peite, joten $A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$. Tästä nähdään, että $tA \subset t \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} tI$. Täten $t\mathcal{F}$ on tA:n Lebesguen peite. Siispä ulkomitan määritelmän mukaan pätee

$$m_n^*(tA) \leq S(t\mathcal{F}) = \sum_{I \in \mathcal{F}} \underbrace{\ell(tI)}_{=t^n \ell(I)} = t^n S(\mathcal{F}).$$

Tämä pätee kaikilla A:n Lebesguen peitteillä, joten ottamalla infimum yli peitteiden $\mathcal{F}$ saamme $m_n^*(tA) \leq t^n m_n^*(A)$.

Toinen suunta voidaan todistaa identtisesti. On kuitenkin hauskempaa päätellä se alkuosasta:

$$m_n^*(A) = m_n^*(t^{-1}(tA)) \leq t^{-n} m_n^*(tA).$$

(Sovelsimme jo todistettua suuntaa joukkoon tA skalaarilla t^{-1}.) □

Mitä "mittoja" monimutkaisemmat joukot tulevatkaan saamaan haluamme ehdottomasti, että n-välin mitta sama kuin sen geometrinen mitta $\ell(I)$. Siksi myös n-välin ulkomitan pitäisi olla vähintään geometrinen mitta. On aika tarkistaa, että ulkomitta on yhteensopiva tämän periaatteen kanssa.

Lause 1.12. *(n-välin ulkomitta) Olkoon I n-väli. Tällöin $\ell(I) \leq m_n^*(I)$. Lisäksi (triviaalisti) pätee toinen suunta $m_n^*(I) \leq \ell(I)$. Täten meillä on perustavanlaatuinen yhtäsuuruus*

$$m_n^*(I) = \ell(I).$$

Huomautus 1.13. Korostamme, että epätriviaali osuus on nimenomaan suunta $\ell(I) \leq m_n^*(I)$. Pysähdy nyt hetkeksi miettimään sitä. Eikö sekin tunnu oikeastaan itsestään selvältä? Mutta, mutta...muista miten kävi $\mathbb{Q}$:n ulkomitan kanssa. Se oli nolla! Jos sisäistit Esimerkin 1.5 todistuksen kunnolla, uskosi parhaillaan todistettavaan tulokseen pitäisi hieman horjua. Kyseessä on siis äärimmäisen keskeinen tulos, joka ei olekaan niin triviaali miltä ensisilmäyksellä näyttää.

Todistus. Hoidetaan triviaali suunta $m_n^*(I) \leq \ell(I)$ pois alta: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin n-väli $J \supset I$ siten, että $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$. Nyt $\{J\}$ on I:n Lebesguen peite, joten $m_n^*(I) \leq S(\{J\}) = \ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin täytyy päteä $m_n^*(I) \leq \ell(I)$.

Nyt on päätuloksen $\ell(I) \leq m_n^*(I)$ vuoro: Olkoon $\mathcal{F} = \{J_k : k = 1, 2, \ldots\}$ n-välin I Lebesguen peite. Teemme vastaoletuksen: $\sum_{k \geq 1} \ell(J_k) < \ell(I)$. Koska $I \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k$, niin väite kieltämättä vaikuttaa uskottavalta, mutta yhdisteen äärettömyys monimutkaistaa asioita. Miten pääsemme eroon siitä? Mikä topologinen apuneuvo on "räätälöity" redusoimaan äärettömät kokoelmat avoimia joukkoja äärellisiksi? Vastaus: ***kompaktius***.

Jos n-väli I olisi kompakti, niin silloin numeroituvalla avoimella peitteellä $\mathcal{F}$ olisi äärellinen osapeite ja olisimme melkein maalissa. Muista, että $\mathbb{R}^n$:n osajoukko on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. N-välimme I on kyllä automaattisesti rajoitettu, mutta ei välttämättä suljettu. Pystymme kuitenkin oleellisesti palauttamaan tilanteen tähän erikoitapaukseen:

On helppo nähdä, että vastaoletuksen ansiosta voimme löytää suljetun n-välin $\tilde{I} \subset I$ siten, että

$$\sum_{k \geq 1} \ell(J_k) < \ell(\tilde{I}).$$

Lisäksi on voimassa sisältyvyys $\tilde{I} \subset I \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k$. Tilanne on siis sama kuin vastaoletuksemme ei-suljetulle n-välille I.

Nyt on aika päästä eroon äärettömyyksistä. Koska $\{J_k : k = 1, 2, \ldots\}$ on kompaktin joukon $\tilde{I}$ avoin peite, on olemassa *äärellinen* osapeite $\{J_k : k = 1, 2, \ldots N\}$, eli pätee sisältyvyys $\tilde{I} \subset \bigcup_{k=1}^{N} J_k$. Samalla pätee, tottakai, myös epäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{N} \ell(J_k) < \ell(\tilde{I}).$$

On suhteellisen selvää, että tämä ei ole mahdollista (piirrä vaikka kuva), joten kyseessä on ristiriita. Allaoleva Lemma 1.15 tekee sen täsmälliseksi lainaten (laiskuuden vuoksi) hieman Riemann-integrointia. Kyseiset yksityiskohdat voi huoletta sivuuttaa; niissä ei tapahdu mitään syvällistä. Mitä teetkin, pidä huolta, ettei mikään varasta huomiota tärkeiltä pääideoilta. □

Huomautus 1.14. Mikä oli todistuksen tärkein askel? Vastaus: kompaktius. Oikeastaan kriittinen tekijä on mahdollista jäljittää reaalilukujen *täydellisyyteen.* Vertaa tilannetta rationaalilukuihin. Niiden joukko ei ole täydellinen eikä rajoitettu rationaali-intervalli ole kompakti.

Kenties löydät seuraavasta vertauksesta jonkin opetuksen: määritellään rationaalilukuvälien "geometrinen mitta" analogisesti $\ell_{\mathbb{Q}}((q,p) \cap \mathbb{Q}) := p - q$, missä $q, p \in \mathbb{Q}$. Vastaavasti voimme määritellä osajoukon $A \subset \mathbb{Q}$ "ulkomitan" $m^*_{\mathbb{Q}}((q,p) \cap \mathbb{Q})$ näiden rationaalivälien geometrisen mitan $\ell_{\mathbb{Q}}((q,p) \cap \mathbb{Q}) := p - q$ avulla. Näillä määritelmillä Lauseen 1.12 vastine ei päde: $m^*_{\mathbb{Q}}((0,1) \cap \mathbb{Q}) = 0 < 1 = \ell_{\mathbb{Q}}((0,1) \cap \mathbb{Q})$.

Lemma 1.15. *Olkoot I ja $I_1, \ldots, I_k$ n-välejä s.e. $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Silloin $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)$. Jos lisäksi leikkauksilla $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei ole sisäpisteitä (ts. mikään $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei sisällä avointa kuulaa) ja $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, niin $\ell(I) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)$.*

Todistus. Aloitetaan määritelmällä ja huomiolla. Olkoon $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ n-väli, missä $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli päätepisteinä $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Määritellään $\chi_I \colon \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ (I:n karakteristinen funktio)

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I\,. \end{cases}$$

Seuraavaksi huomataan, että geometrinen mitta voidaan kätevästi esittää karakteristisen funktion Riemann-integraalina:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_I = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \ell(I).$$

Nyt voimme varmistaa, että väitteemme todellakin pätee: Oletuksesta $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ seuraa, että $\chi(x) \leq \sum_{j=1}^{k} \chi_j(x) \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$., joten arvioimme

$$\sum_j \ell(I_j) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Big(\sum_j \chi_{I_j}\Big)}_{\geq \chi_I} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I = \ell(I).$$

Jos väleillä I_j ei ole yhteisiä sisäpisteitä, niin $\chi(x) = \sum_{j=1}^{k} \chi_j(x)$ paitsi mahdollisesti välien reunoilla, jotka eivät vaikuta integrointiin. □

1.3 Lebesguen sisämitta

On vihdoin aika esitellä miten muodostamme uusia mitallisia joukkoja. Meiltä kuitenkin puuttuu toistaiseksi yksi oleellinen elementti: tapa approksimoida joukkoa sisältä ja sen mahdollista ”mittaa” alhaalta. Kun tämä on mahdollista, mitallisuus määritellään luontevasti ”arvioiden yhtymisenä”.

Komplementtiperiaate.
Miten arvioisimme joukon mittaa alhaalta? Muista mitä teimme teimme ulkomitassa: perusideana oli hyödyntää tietoa (tai oletusta) että numeroituvan yhdisteen $\bigcup_i I_i$ mahdollinen mitta on korkeintaan summa $\sum_i \ell(I_i)$. Toisin sanoen, käytimme avoimia joukkoja $\bigcup_i I_i$ jotka sisälsivät joukon A ja jonka mitoille kykenimme päättelemään *ylärajan*. Vastaavasti, sisämittaa varten meidän pitäisi löytää joukkoja K jotka sisältyvät joukkoon A ja joiden (mahdolliselle) mitalle osaamme päätellä *alarajan*.

Mitä joukkoja käyttäisimme? Ensimmäinen idea voisi olla yrittää yhdisteitä $\bigcup_i I_i \subset A$, eli ”täyttää” joukkoa sisältä päin. Tämä ei kuitenkaan kahdesta syystä toimi. Ensinnäkin tarvitsemme *alarajan* yhdisteen $\bigcup_i I_i$ mitalle, ja summa $\sum_i \ell(I_i)$ tarjoaa automaattisesti vain ylärajan. Saattaisimme toki käyttää *erillisiä* (eikä välttämättä avoimia) n-välejä, jolloin summan $\sum_i \ell(I_i)$ voisi ajatella tarjoavan myös alarajan. Tämä lähestymistapa toimii ja laajentaa klassista Jordanmittaa, mutta ei tuota modernia mittaa. Lebesguella nimittäin oli vielä parempi idea. Se lähtee liikkeelle eräästä hyvin yksinkertaisesta huomiosta:

Oleta, että $\mathbb{R}^3$:n osajoukko, kutsutaan sitä A:ksi, sisältyy johonkin kuutioon: $I \supset A$. Nyt jos tiedämme, että joukon A tilavuus on *korkeintaan* $a \in \mathbb{R}$, niin silloin sen komplementin $I \setminus A$ tilavuus on *vähintään* $\ell(I) - a$. Muuten kuution I tilavuutta ”jäisi yli”. Kääntäen, jos tiedämme, että komplementin $I \setminus A$ tilavuus on *korkeintaan* $b \in \mathbb{R}$, niin silloin joukon A tilavuus on *vähintään* $\ell(I) - b$. Yhteenveto: jokainen komplementin $I \setminus A$ yläraja antaa joukon A alarajan, ja toisin päin! Eli tavallaan joukon ja sen komplementin approksimointi ovat jokseenkin sama asia; mitä paremmin arvioimme yhtä, sen paremmin osaamme arvioida myös toista. Mieti asiaa.

Tätä yleistä periaatetta voi nyt soveltaa Lebesguen peitteisiin ja sisäarvioihin. Olkoon $I_1, I_2, \ldots$ komplementin $I \setminus A$ Lebesguen peite. Tällöin joukko $K := I \setminus \bigcup_i I_i$ *sisältyy* joukkoon A. Lisäksi osaamme sanoa K:n (mahdolliselle) mitalle *alarajan*: $\ell(I) - \sum_i \ell(I_i)$. Tämä on samalla joukon A mitan ajaraja. Voimme siis käyttää suljettuja joukkoja $K := I \setminus \bigcup_i I_i$ sisäapproksimointiin. Edelleen, koska $m^*(I \setminus A)$ on yläraja komplementin $I \setminus A$ tilavuudelle, niin $\ell(I) - m^*(I \setminus A)$ on alaraja joukon A tilavuudelle.

Näiden pohdintojen inspiroimana tulemme *määrittelemään* n-välin I *osajoukon* $A \subset I$ sisämitan $m_*(A)$ kaavalla

$$m_*(A) := \ell(I) - m^*(I \setminus A). \tag{1.16}$$

Yleinen joukko ei tietenkään sisälly mihinkään yksittäiseen n-väliin. Voisimme määritellä yleisen joukon sisämitan supremumina [5]

$$m_*(A) := \sup\{\ell(I) - m^*(I \setminus A) : I \subset \mathbb{R}^n\}, \tag{1.17}$$

mutta tämä ei ole tarpeen, sillä Lebesgue-mitallisuuden määritelmään riittää rajoittua yhteen n-väliin kerrallaan. Näin ollen annamme sisämitan vain leikkauksille n-välien kanssa:

[5] Voisimme myös osittaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ numeroituvan moneen n-väliin, soveltaa niissä edellistä kaavaa, ja lopuksi summata yhteen.

Määritelmä 1.16 (Sisämitta)**.** Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sisämitta n-välissä I on

$$m_*(I \cap A) := \ell(I) - m^*(I \setminus A).$$

Meidän olisi tarkistettava, että jos $I \cap A = J \cap A$, missä I ja J ovat molemman n-välejä, niin $\ell(I) - m^*(I \setminus A) = \ell(J) - m^*(J \setminus A)$. Muuten $m_*(I \cap A)$ ei olisi hyvin määritelty. Tämä jätetään halukkaille harjoitustehtäväksi.[6]

Sisämitan pari perusominaisuutta tulevat tarpeeseen:

Lemma 1.17. *Sisämitalle pätee seuraavat ominaisuudet:*

1. $m_*(I \cap A) \leq m^*(I \cap A)$ *kaikilla* I *on n-väli ja* $A \subset \mathbb{R}^n$.
2. *Jos* $A \subset B$, *niin* $m_*(I \cap A) \leq m_*(I \cap B)$.

Todistus.

1. Ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa, että $\ell(I) = m^*(I) \leq m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A)$.
2. Ulkomitan monotonisuudesta seuraa, että $m_*(I \cap A) := \ell(I) - m^*(I \setminus A) \leq \ell(I) - m^*(I \setminus B) = m_*(I \cap B)$.

Kommentti. Ei ole yhtä filosofisesti oikeaa tapaa määritellä ulko- ja sisäapproksimaatiota. Jos esimerkiksi käytämme *äärellisiä* yhdisteitä ja monikulmiota, niin päädymme klassiseen mitta/integrointiteoriaan (Jordan-mitta, Riemann-integraali). Jos taas sallimme numeroituvat yhdisteet, muttemme "komplementtiperiaatetta", saamme mittateorian joka osuu klassisen ja modernin väliin. Tämä kurssi osoittaa, että numeroituvuus ja komplementtiperiaate ovat molemmat ideoita, jotka kantavat matemaattista hedelmää.

1.4 Lebesgue mitallisuus

Motivaatiomme mitallisuudelle on, että joukkoa voi approksimoida ulkoa ja sisältä niin hyvin, että jää jäljelle vain yksi luku joka voi mahdollisesti olla sen mitta. Tätä yksikäsitteistä lukua kutsutaan silloin sen mitaksi. Luku itse on kuitenkin toissijainen, tärkeintä on sen "yksikäsitteisyys" eli ylä- ja alarajojen yhtyminen.

Teknisistä syistä johtuen mielivaltaisen (ison) joukon mitallisuus on helpompaa määritellä "paloittain", eli tarkastelemalla sen rajoittumia n-väleihin. Tämän voi tehdä esimerkiksi seuraavasti:

Määritelmä 1.18 (Mitallinen joukko (v. 1904))**.** Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen (lyhyesti, mitallinen) jos sen ulko- ja sisämitta ovat samat kaikissa n-väleissä. Eli pätee

$$m_*(I \cap E) = m^*(I \cap E) \quad (I \, \textit{on n-väli}). \tag{1.18}$$

Koska aina pätee $m_*(I \cap A) \leq m^*(I \cap A)$, niin riittää tarkistaa suunta $m_*(I \cap A) \geq m^*(I \cap A)$.

Lisätieto. Itseasiassa riittäisi valita mikä tahansa kokoelma n-välejä jotka "täyttävät" koko avaruuden $\mathbb{R}^n$. Esimerkiksi, jos E toteuttaa yhtälön (1.18) n-väleillä $I_k : (-k, k) \times \ldots \times (-k, k), k =$

[6] Huomaa, että koska tällöin myös $I \cap J \cap A = I \cap A$, niin riittää todistaa tapaus $J \subset I$. Täsmällinen todistus on indeksien ja leikkausten kirjanpitoa, joka ei tässä vaiheessa ole ollenkaan välttämätöntä.

$1, 2, \ldots$, niin se on Lebesgue-mitallinen. Eli määritelmässämme on hieman ylimääräistä, mutta valintamme yksinkertaistaa asioita.

Carathéodoryn ehto

Koska sisämitta voidaan esittää ulkomitan avulla, tämä ehto voidaan lausua seuraavasti: $\ell(I) - m^*(I \cup E) = m^*(I \cap E)$. Viemällä ulkomittatermit samalle puolelle pääsemme muotoiluun, jossa *ei esiinny enää sisämittaa*:

$$\ell(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E). \tag{1.19}$$

Tulkinta. Tämä muotoilu tarjoaa hieman erilaisen tulkinnan mitallisuudelle: joukko on mitallinen jos se "leikkaa ulkomitan suhteen siististi" kaikki n-välit. Se sopii ensimmäiseen tulkintaamme, jonka mukaan "joukon E sisä- ja ulkoapproksimaatiot täsmäävät". Molemmat ehdot sanovat omalla tavallaan, että "joukon E reuna ei ole liian monimutkainen".

Kommentti. Kirjallisuudessa tämä ehto, tai Carathéodoryn ehto alla, otetaan usein suoraan mitallisuuden määritelmäksi. Niiden etuna on, että säästytään sisämitan konstruoimisen vaivalta. Lisäksi ne ovat suoraviivaisempia yleistää abstrakteihin mitta-avaruuksiin. Helposti kuitenkin unohdetaan mitallisuuden alkuperäinen motivaatio. Ehto (1.19) sanoo epäsuorin joskin elegantein termein: Joukon E sisä- ja ulkoapproksimaatiot täsmäävät kaikissa n-väleissä, eli $m_*(I \cap A) = m^*(I \cap A)$.

Leikkausehtoa voi muokata vielä pidemmälle:

Lemma 1.19 (Carathéodoryn karakterisaatio mitallisuudelle (v. 1914))**.** *Olkoon joukko E avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Jos E toteuttaa ehdon* (1.19) *kaikilla n-väleillä, niin pätee myös*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(\underbrace{A \setminus E}_{=A \cap E^c}) \quad \underline{\textit{kaikilla}} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Tällöin sanotaan, että E toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

Todistus. Osoitetaan, että E "leikkaa mielivaltaisen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ siististi kahtia": Valitaan $\varepsilon > 0$ ja sitä vastaava joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F}$ siten, että $m^*(A) + \varepsilon \geq S(\mathcal{F})$. Nyt ei tarvitse muuta kuin arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
m^*(A) + \varepsilon &\geq S(\mathcal{F}) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{F}} \ell(I) \\
&\overset{1.12}{=} \sum_{I \in \mathcal{F}} m^*(I) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{F}} m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E) \\
&\overset{sub.add}{\geq} \underbrace{m^*\Big(\bigcup_{I \in \mathcal{F}} I \cap E\Big)}_{\supset A \cap E} + \underbrace{m^*\Big(\bigcup_{I \in \mathcal{F}} I \setminus E\Big)}_{\supset A \setminus E} \\
&\overset{monot.}{\geq} m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, joukko E leikkaa mielivaltaisen testijoukon A siististi. (Muista, että epäyhtälön todistaminen riittää.) Eli E toteuttaa Carathéodoryn ehdon. $\square$

Moraali: Tulos on itseasiassa varsin intuitiivinen: Oletus sanoo, että joukko E leikkaa kaikki n-välit "siististi" kahtia. Siten tuntuu järkevältä, että se leikkaa kaikki äärelliset kokoelmat n-välejä siististi. Ja oikeastaan saman tien myös kaikki numeroituvat kokoelmat (muista "$\varepsilon 2^{-n}$-kikka"). Erityisesti se siis leikkaa kaikki Lebesguen peitteet siististi. Mutta ulkomitta määritellään Lebesguen peitteiden avulla joten...

Huomautus 1.20. Carathéodoryn ehdossakin riittää tarkistaa epäyhtälö: $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \text{kaikilla } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Suunta $\boxed{\leq}$ seuraa subadditiivisuudesta.

Olemme määritelleet ja karakterisoineet mitallisuuden, ja jäljellä on määrätä mitallisen joukon varsinainen mitta. Luonnollisesti mitan pitäisi olla se luku joka saadaan ulkoarvioinnista (ja sisäarvioinnista).

Määritelmä 1.21 (Mitan määritelmä)**.** Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-)mitallinen. Sen (n-ulotteinen Lebesgue-)mitta $m(E)$ (tarvittaessa $m_n(E)$) on sen ulkomitta. Eli merkitään $m(E) = m^*(E)$.

Merkitään

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n = \{E \subset \mathbb{R}^n \colon E \text{ Lebesgue-mitallinen}\} \quad \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Mitan voi siis ajatella ulkomitan rajoittumana mitallisiin joukkoihin:

$$m = m^*|\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \colon \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$$

Myöhemmin näytetään, että

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

1.5 Mitallisten joukkojen perusominaisuuksia

Vaikka mitallisuuden määritelmä vaikuttaakin hyvin luonnolliselta, on silti syytä tarkistaa että muutamat intuitiiviset perustulokset pitävät paikkansa. Esimerkiksi, kuvittele että joukon ulkomitta on nolla. Selvästi kyseinen joukko on "hyvin mitätön" joten tuntuisi luonnolliselta, että se on mitallinen (koska sen mitan "pitäisi" olla nolla). Jos näin ei olisi, mittateoriassamme saattaisi olla jotakin korjattavaa (Tämä "puute" tosin on joissakin hyödyllisissä mittateorioissa, kuten Borel-joukoissa). Lebesguen mitta kuitenkin läpäisee testin:

Lause 1.22. *Jos joukon E ulkomitta on nolla, se on mitallinen. Eli,*

$$m^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \text{ on mitallinen.}$$

Todistus. Olkoon I on mielivaltainen n-väli. Ulkomitan monotonisuudesta seuraa, että $0 = m^*(E) \geq m^*(I \cap E) \geq m_*(I \cap E) \geq 0$. Täten $m^*(I \cap E) = m_*(I \cap E)$, ja E on mitallinen. □

Tarkastellaan seuraavaksi mitallisen joukon E komplementtia E^c. Jos kerran E:n mitallisuus tarkoittaa, että sitä voi "approksimoida mielivaltaisen hyvin sekä ulkoa että sisältä", niin eikö silloin komplementtia E^c voi vastaavasti approksimoida mielivaltaisen hyvin sisältä ja ulkoa? Kuten Sisämitta-kappaleessa selitettiin, jokainen E:n "ulkoapproksimaatio" vastaa sen komplementin "sisäapproksimaatiota", ja toisin päin. Vaihtoehtoisesti jos käytämme tulkintaa "reunan siisteydestä" niin eiköhän E leikkaa siististi jos ja vain jos E^c leikkaa? Siispä tulkintojen näkökulmasta kuvittelisimme, että joukon E mitallisuus olisi täysin yhtäpitävää sen komplementin mitallisuuden kanssa. Näin on:

Lause 1.23. *Joukko on mitallinen jos ja vain jos sen komplementti on mitallinen. Eli*

$$E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad E^c \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n.$$

Todistus. Tämä nähdään helposti Carathéodoryn karakterisaatiosta joka on "symmetrinen komplementaation suhteen": Joukko E on mitallinen jos ja vain jos pätee

$$m^*(A) = m^*(A \cap \underbrace{E}_{(E^c)^c}) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Kuten huomio $E = (E^c)^c$ tekee selväksi, tämä on täsmälleen Carathéodoryn ehto komplementin E^c mitallisuudelle. □

Esimerkki 1.24. Erikoistapauksia:

$$\emptyset \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R},$$
$$\text{rationaaliluvut } \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}, \text{ irrationaaliluvut } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}.$$

On aika varmistaa, että mitallisuus toteuttaa tärkeimmän intuitiivisen kriteerimme: Haluamme ehdottomasti, että n-välit osoittautuvat mitallisiksi.

Lause 1.25 (N-välin mitallisuus)**.** *Jos J on n-väli, niin J on mitallinen ja*

$$m(J) = \ell(J).$$

Todistus. Meidän on tarkistettava, että $m_*(I \cap J) = m^*(I \cap J)$ kun I on mielivaltainen n-väli. Mutta n-välien leikkaus $I \cap J$ on edelleen n-väli (tai tyhjä joukko). Siten Lauseen 1.12 mukaan $m^*(I \cap J) = \ell(I \cap J)$. Vastaavasti, seuraava Lemma 1.26 kertoo, että $m_*(I \cap J) = \ell(I \cap J)$. Täten J on mitallinen.

Lemma 1.26. *N-välin I sisämitta on sen geometrinen mitta: $m_*(I) = \ell(I)$.*

Todistus. Suoraan sisämitan määritelmästä nähdään, että $m_*(I) = \ell(I) - m^*(\underbrace{I \setminus I}_{\emptyset}) = \ell(I)$.

1.6 Ulkomitan täysadditiivisuus mitallisille joukoille

Olkoon meillä kaksi mitallista joukkoa E ja F. Tulkintamme mukaan se tarkoittaa, että molempia voi "approksimoida sekä ulkoa että sisältä". Eikö tällöin tuntuisi uskottavalta, että myös niiden yhdistettä $E \cup F$ voi approksimoida ulkoa ja sisältä? Ainakin jos E ja F ovat erillisiä tämä vaikuttaa selvältä. Olettaisimme siis intuitiomme puolesta että mitallisuus "säilyy" äärellisissä yhdisteissä. Näin onkin, mutta käytännössä todistus sujuu helpoimmin hyödyntämällä Cathéodoryn karakterisaatiota.

Lisäksi on ehkä mielenkiintoista huomata, että (ulko)mitan täysaddiivisuus mitallisille joukoille on helpompi todistaa kuin itse yhdisteen mitallisuus. Siksi osoitammekin ensiksi additiivisuustuloksen.

Lause 1.27 (Mitan täysadditiivisuus). *Olkoon $E_1, E_2, \ldots$ mitallisia ja erillisiä. Tällöin pätee "täysadditiivisuus"*

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Todistus. Tehdään ensin lämmittelyksi tapaus $k = 2$. Joukko E_1 toteuttaa Carathéorodyn ehdon testijoukolla $E_1 \cup E_2$, joten $m^*(E_1 \cup E_2) = m^*((E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*((E_1 \cup E_2) \setminus E_1) = m(E_1) + m(E_2)$.

Äärellinen tapaus: joukko E_1 toteuttaa Carathéorodyn ehdon testijoukolla $\bigcup_{i=1}^k E_i$, joten $m^*(\bigcup_{i=1}^k E_i) = m(E_1) + m^*(\bigcup_{i=2}^k E_i)$. Sitten joukko E_2 toteuttaa Carathéorodyn ehdon testijoukolla $\bigcup_{i=2}^k E_i$, joten $m^*(\bigcup_{i=2}^k E_i) = m(E_2) + m^*(\bigcup_{i=3}^k E_i)$. Ja niin edelleen.

Numeroituva tapaus: Ulkomitan monotonisuuden perusteella

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m^*(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=1}^{N} m(E_i),$$

Päästämällä $N \to \infty$ saamme epätriviaalin suunnan $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. Suunta "$\leq$" on subadditiivisuus. $\square$

Eli ulkomitta on jopa numeroituvan täysadditiivinen Lebesgue-mitallisille joukoille. *Mutta onko itse numeroituva yhdiste Lebesgue-mitallinen?* Tämä osoittautuu lopulta kriittisemmäksi kysymykseksi kuin mitan additiivisuus. Ilman sitä saisimme kyllä enemmän mitallisia joukkoja ja siten enemmän integroituvia funktioita, mutta emme teoriaa joka olisi samalla tavalla rikas ja käyttökelpoinen kuin millaiseksi Lebesgue-integraali lopulta osoittautuu. Kurssin tärkein tulos onkin, että numeroituva yhdiste $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ kuuluu yhä Lebesgue-mitallisiin joukkoihin. Sitä ennen osoitamme mitallisuuden äärellisille yhdisteille.

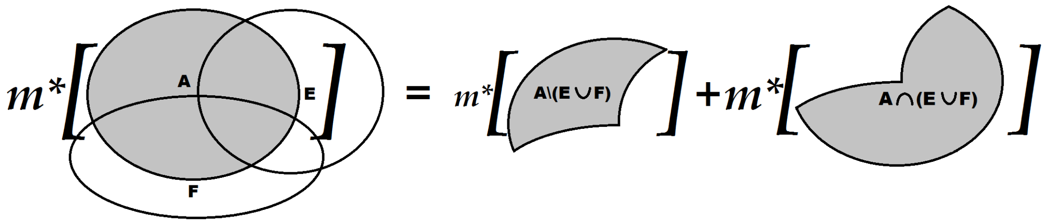
1.7 Äärellisen yhdisteen ja leikkauksen mitallisuus

Lemma 1.28. *Jos joukot* $E_1, \dots, E_k$ *ovat mitallisia niin myös äärellinen yhdiste* $\bigcup_{i=1}^k E_i$ *ja leikkaus* $\bigcap_{i=1}^k E_i$ *ovat mitallisia.*

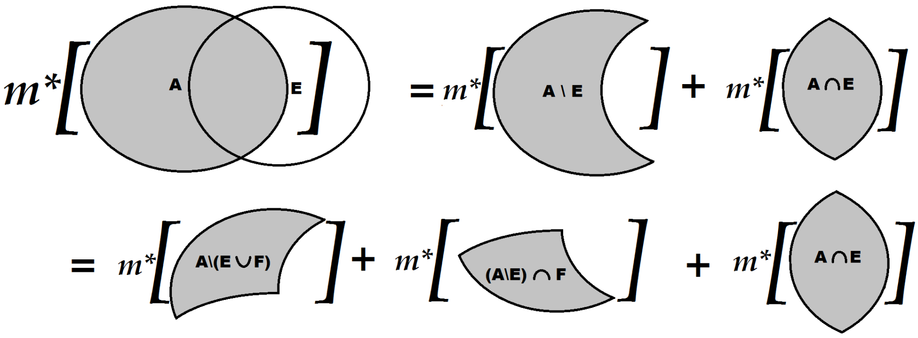
Todistus+Kuvitus+Moraali. $\boxed{\text{(a) yhdiste:}}$ Ensinnäkin, koska voimme kirjoittaa $\bigcup_{i=1}^k E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) \cup E_k$, niin näemme induktiolla, että riittää osoittaa tapaus $k = 2$.

Siispä olkoon joukot E ja F mitallisia. Carathéodoryn ehdon tulkinnan mukaan kumpikin "leikkaa minkä tahansa joukon siististi kahtia". Meidän pitäisi osoittaa, että myös yhdiste $E \cup F$ leikkaa siististi.

Olkoon siis A mielivaltainen testijoukko. Tavoite: meidän pitää näyttää, että voimme "leikata sen kahteen osaan" $A \setminus (E \cup F) = (A \setminus E) \setminus F$ ja $A \cap (E \cup F)$ niin, että ulkomitta säilyy:



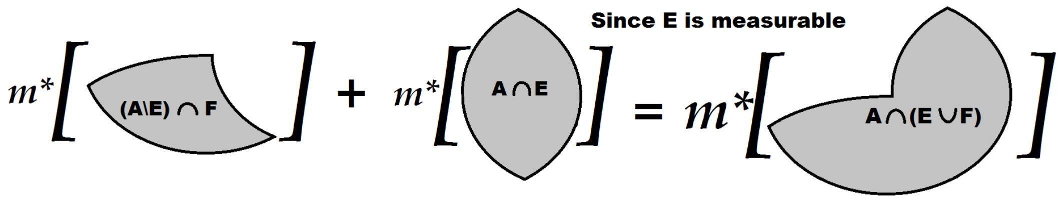
Ainoa tieto jota voimme käyttää on, että joukot E ja F "leikkaavat siististi" minkä joukon tahansa. Aloitetaan vaikka leikkaamalla joukolla E, jolloin saamme $m^*(A) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E)$. Sen jälkeen on luultavasti aika käyttää toista "leikkuriamme" F. Leikkaamme sillä joukkoa $A \setminus E$ (toisin sanoen, sovellamme Carathéodoryn ehtoa testijoukkoon $A \setminus E$): $m^*(A \setminus E) = m^*((A \setminus E) \setminus F) + m^*((A \setminus E) \cap F)$.



Ensin käytetään joukon E mitallisuutta; sen jälkeen joukon F mitallisuutta.

Nyt olemme jakaneet alkuperäisen testijoukon A kolmeen osaan sailyttäen ulkomitan[7]! Yksi paloista on jo haluttua muotoa, nimittäin $A \setminus (E \cup F)$. Jäljelle jäävät palat, $A \cap E$ ja $(A \setminus E) \cap F$ *muodostavat yhdessä toisen halutun loppujoukon* $A \cap (E \cup F)$. Voimmeko liittää joukkoja yhteen? Toki! Itse asiassa voimme vedota jopa kahteen eri argumenttiin: Pelkkä ulkomitan subadditiivisuuskin takaa, että $m^*((A \setminus E) \cap F) + m^*(A \cap E) \geq m^*(A \cap (E \cup F))$. Tämä todistaa epätriviaalin suunnan Carathéodoryn ehdosta. Toisaalta, voimme yksinkertaisesti soveltaa Carathéodoryn ehtoa mitallisella E ja testijoukolla $A \cap (E \cup F)$:

[7] Jos haluamme, voimme jakaa myös joukon $A \cap E$ kahteen osaan F joukolla. Näin saamme "mahdollisimman monta palaa hävittämättä mittaa".



Näin olemme saaneet jaettua testijoukon haluttuihin palasiin hävittämättä ulkomittaa. Tämä osoittaa yhdisteen $E \cup F$ mitallisuuden.

$\boxed{\text{(b) leikkaus:}}$ Koska voimme de Morganin avulla kirjoittaa

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\Big)^c ,$$

niin komplementin mitallisuus (Lause 1.23) ja (a)-osa viimeistelevät todistuksen. □

Korollari 1.29. *Jos joukot E_1 ja E_2 ovat mitallisia, niin joukkoerotus $E_1 \setminus E_2$ on mitallinen.*

Todistus. $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$. □

1.8 Lebesgue-mitallisten joukkojen peruslause.

Olemme osoittaneet, että mitallisuus säilyy äärellisissä yhdisteissä. Tämä on mukavaa mutta ei merkittävää, sillä sama pätee klassisessa mittateoriassa – myös Jordan-mitallisuus säilyy äärellisissä yhdisteissä.

Koko modernin mittateorian ja sitä myötä integrointiteorian voima perustuu siihen, että mitallisuus säilyy myös numeroituvissa yhdisteissä. Tämä ominaisuuden saavuttaminen on tietyssä mielessä jopa tärkeämpää kuin konstruoida "mahdollisimman paljon mitallisia joukkoja". Jos pitäisi valita yksi kurssin lause ylitse muiden, niin se olisi tämä.

Lause 1.30. *Olkoon $E_1, E_2, \ldots$ jono mitallisia joukkoja. Tällöin joukot*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \quad \textit{ja} \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i$$

ovat mitallisia. Jos lisäksi joukot E_i ovat erillisiä, *niin Lauseen 1.27 mukaan pätee*

$$m\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} m(E_i). \qquad \textit{("täysadditiivisuus")} \tag{1.21}$$

Tuloksen syvällinen sanoma ei ole kaava (1.21), joka on oleellisesti Lause 1.27, vaan että "mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä (ja leikkauksessa)".

Lauseen 1.30 todistuksen ydin on seuraava lemma:

Lemma 1.31. *Olkoon $F_1, F_2, \ldots$ jono mitallisia joukkoja. Tällöin pätee*

$$m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) = \lim_{N\to\infty} m\Big(\bigcup_{i=1}^{N} F_i\Big).$$

Huomio. Vasemmalla puolella on ulkomitta, koska emme ihan vielä tiedä numeroituvan yhdisteen on mitallisuutta. Oikean puolen äärellinen yhdiste puolestaan tiedetään jo mitalliseksi (Lause 1.28).

Lemman 1.31 Todistus. Suunta $\geq$ on selvä, sillä epäyhtälö $m^*(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq m(\cup_{i=1}^{N} F_i)$ pätee ulkomitan monotonisuuden perusteella kaikilla $N \in \mathbb{N}$.

Suunta $\leq$: Oikeastaan ainoa ulkomitan perusominaisuus jota voimme hyödyntää tässä tilanteessa on subadditiivisuus. Arvio $m^*(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_i m(F_i)$ on yksinään kuitenkin liian karkea, sillä emme ota huomioon joukkojen F_i päällekkäisyyksiä.[8]

Siksi teemmekin ensin yleisen huomion (joka ei riipu joukkojen mitallisuudesta): Numeroituva yhdiste $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ voidaan aina esittää numeroituvana *erillisenä* yhdisteenä seuraavasti:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \setminus F'_{i-1}, \tag{1.22}$$

missä $F'_{i-1} = \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$. Tämän tarkempi todistus on esitetty alla (Lemma 1.32).

Nyt käytämme subadditiivisuutta tehokkaammin:

$$m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(F_i \setminus F'_{i-1}) \tag{1.23}$$

Lisäksi erotukset $F_i \setminus F'_{i-1}$ tiedetään mitallisiksi (Korollaari 1.29), joten $m^*(F_i \setminus F'_{i-1}) = m(F_i \setminus F'_{i-1})$. *Nyt voimme puolestaan vedota (ulko-)mitan äärelliseen täysadditiivisuuteen mitallisille joukoille*, jonka mukaan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} m^*(F_i \setminus F'_{i-1}) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} m(F_i \setminus F'_{i-1}) \\ &= \lim_{N\to\infty} m(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} F_i \setminus F'_{i-1}}_{\bigcup_{i=1}^{N} F_i}). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Tämä viimeistelee todistuksen. □

Nyt on aika todistaa päätulos. Kuten näemme, se on suhteellisen suora seuraus äärellisen yhdisteen mitallisuudesta ja edellisestä lemmasta.

Lauseen 1.30 Todistus.

Olkoon I mielivaltainen n-väli. Meidän on osoitettava, että $m_*(I \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m^*(I \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$. Lähdemme liikkeelle sisämitan monotonisuudesta:

$$m_*(I \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m_*(I \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i). \tag{1.25}$$

[8] Kuvittele miten käy jos $F_i = F$ kaikilla i.

Nyt äärellinen yhdiste $I \cap \bigcup_{i=1}^N E_i = \bigcup_{i=1}^N I \cap E_i$ tiedetään mitalliseksi, joten $m_*(I \cap \bigcup_{i=1}^N E_i) = m^*(I \cap \bigcup_{i=1}^N E_i)$. Tämä pätee kaikilla $N \in \mathbb{N}$, joten saamme epäyhtälön

$$m_*(I \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \lim_{N\to\infty} m^*(I \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) \tag{1.26}$$

Nyt Lemma 1.21 kertoo, että ”voimme siirtää rajankäynnin mitan sisälle”:

$$\lim_{N\to\infty} m^*\big(I \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i\big) = m^*\big(I \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\big). \tag{1.27}$$

Tämä viimeistelee todistuksen. □

Heuristinen perustelu miksi mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä. Muista, että mitallisuuden takana on ajatus, että sen toteuttavaa joukkoa voi ”approximoida” sekä ulkoa, että sisältä mielivaltaisen hyvin. Jos meillä nyt on numeroituva kokoelma joukkoja, joita jokaista voi approksimoida mielivaltaisen hyvin, niin silloin on uskottavaa, että niiden yhdistettäkin voi: approximoi ensimmäistä tarkkuudella $\varepsilon 2^{-1}$, toista tarkkuudella $\varepsilon 2^{-2}$ jne. Tällöin yhdistettä voi luultavasti approksimoida tarkkuudella $\varepsilon 2^{-1} + \varepsilon 2^{-2} + \ldots = \varepsilon$. Idean voi tehdä täsmälliseksi ja siitä saa toisen todistuksen Lauseelle 1.30.

Vaikka Lauseen 1.30 merkitystä ei voi yliarvioida, sitä ei tässä mielessä pidä pitää *yllättävänä* tuloksena. Päinvastoin, jos olemme onnistuneet konstruoimaan mitallisuuden käsitteen, joka noudattaa intuitiotamme, niin todellakin *odotamme* tämän tuloksen pitävän paikkansa.

Nostamme erikseen esiin Lemmassa 1.31 käytetyn yleishyödyllisen tekniikan.

Lemma 1.32. *Olkoon joukot E_i mitallisia kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa* erilliset *ja mitalliset $F_i \subset E_i$ s.e.*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Todistus. Valitaan

$$\begin{aligned}
F_1 &= E_1, && \text{[mitallinen]}\\
F_2 &= E_2 \setminus E_1, && \text{[mitallinen (Korollaari 1.29)]}\\
&\vdots\\
F_k &= E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, && \text{[mitallinen (K. 1.29 ja 1.28)]}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

On helppo tarkistaa (tarkista!), että $F_i \cap F_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, ja $\bigcup_{i=1}^N E_i = \bigcup_{i=1}^N F_i$ kaikilla $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. □

Lisähuomio: Sama tulos samalla todistuksella pätee jos unohdetaan kaikki mitallisuudet: *mikä tahansa numeroituva yhdiste voidaan aina esittää numeroituvana erillisenä yhdisteenä.*

1.9 Avoimen joukon mitallisuus

Ainoat konkreettiset esimerkit mitallisista joukoista tähän mennessä ovat n-välit ja joukot joiden ulkomitta tai komplementin ulkomitta on nolla. Numeroituvan additiivisuuden avulla (Lause 1.30) saamme nopeasti paljon lisää. Tässä luvussa osoitamme, että mm. avoimet ja siten suljetut joukot (avoimien joukkojen komplementteina) ovat mitallisia.

Strategiamme on hyvin yksinkertainen: Meillä on perusrakennuspalikoina avoimet n-välit. Mitä avoimia joukkoja voimme rakentaa niistä numeroituvina yhdisteinä? Käy ilmi, että kaikki.

Lemma 1.33 (Avoin joukko numeroituvana yhdisteenä)**.** *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin on voimme esittää sen numeroituvana yhdisteenä $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ avoimista n-väleistä I_i.*

Todistus. Suoraviivainen tapa lähestyä ongelmaa on muistella avoimen joukon määritelmää (Topo I:n mielessä). Sen mukaan tiedämme, että jos valitsemme pisteen $x \in G$, niin on olemassa kuulaympäristö $B(x,r)$ joka myös sisältyy joukkoon G. On myös selvää, että edellisessä virkkeessä voi vaihtaa kuulan n-väliin, koska jokaisen kuulan sisälle mahtuu n-väli (ja toisinpäin).

Eli jokainen piste $x \in G$ voidaan ympäröidä avoimella n-välillä, merkitään sitä $I(x)$:llä, niin että $I(x) \subset G$. Voimme siis esittää joukon G ainakin ylinumeroituvana yhdisteenä

$$G = \bigcup_{x \in G} I(x).$$

Ovelaa, *mutta miten pääsemme eroon ylinumeroituvuudesta*? (Lopullinen motiivimme on G:n mitallisuus ja ylinumeroituva yhdiste ei välttämättä säilytä mitallisuutta.) Perhe $\mathcal{G} := \{I(x) \colon x \in G\}$ on G:n avoin peite. Koska joka ikinen piste $x \in G$ on piiritetty avoimella joukolla $I(x)$, peitteen $\mathcal{G}$ jäsenillä täytyy olla *paljon* ”päällekkäisyyksiä”. Voimme siis luultavasti heittää osan joukoista $I(x)$ menemään. Mutta kuinka paljon? Riittääkö jättää numeroituvan monta? Riittää. Pohjimmiltaan kyseessä on eräs syvällinen topologinen ominaisuus (L. 1.34), jonka esimerkiksi avaruus $\mathbb{R}^n$ sattuu omaamaan. Jätämme todistuksen erinomaiseksi harjoitustehtäväksi, ja esitämme tässä vaihtehtoisen perustelun:

Mikä topologinen ominaisuus ”eliminoi ylimääräisiä avoimia joukkoja”? Vastaus: kompaktius. Jos joukko G olisi kompakti, niin saisimme heti jopa *äärellisen* $\mathcal{G}$:n osapeitteen. Mutta joukko G on avoin (eikä välttämättä rajoitettu) eli se ei ole kompakti (oletamme, että $G \neq \emptyset$). *Avoin joukko voidaan kuitenkin esittää numeroituvana yhdisteenä kompakteista osajoukoista!* Määritellään joukko $G_k := \{x \in [-k,k]^n : dist(x, G^c) \geq 1/k\} \subset G$, joka koostuu G:n pisteistä jotka eivät ole liian lähellä reunaa eivätkä liian kaukana origosta. Nyt G voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$G = \bigcup_{k \geq 1} G_k,$$

missä G_k on selvästi suljettu ja rajoitettu, ja siten kompakti (Topo I). $\mathcal{G}$ on nyt myös alijoukon $G_k \subset G$ avoin peite, joten on olemassa G_k:n äärellinen osapeite $\mathcal{G}_k$. Nyt äärellisten peitteiden $\mathcal{G}_k$ yhdiste,

$$\mathcal{F} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{G}_k,$$

on G:n peite. Peite $\mathcal{F}$ on äärellisten perheiden numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

Koska jokainen peite $\mathcal{G}_k$ koostui n-väleistä, myös peite $\mathcal{F}$ koostuu n-väleistä ja jokainen niistä tietenkin sisältyy edelleen joukkoon G. Täten pätee

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i. \qquad \square$$

Kuten edellä viitattiin, $\mathbb{R}^n$:n topologialla on seuraava mielenkiintoinen ominaisuus. Se kertoo, että mielivaltaiset avoimet peitteet voi monissa tilanteissa "korvata" numeroituvilla peitteillä.

Lause 1.34. *(Lindelöfin lause) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa osajoukko ja*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

peite avoimilla joukoilla $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathcal{A}$. Silloin on olemassa numeroituva *alipeite*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A.$$

Todistus. HT □

Lause 1.35. $\mathbb{R}^n$*:n avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.*

Todistus. Avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä n-välejä (Lemma 1.33). N-välit ovat mitallisia ja mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä (Lause 1.30).

Jos F suljettu, niin F^c avoin ja siten mitallinen. Mitallisuus säilyy komplementissa, joten $F = (F^c)^c$ on mitallinen. □

1.10 Mitallisten joukkojen perheen sisäinen rakenne, σ-algebra.

Mitallisiin joukkojen kokoelma kattaa siis kaikki avoimet ja suljetut joukot. Mutta se "kasvaa" vielä huomattavasti, ja voisi väljästi sanoa, että siihen kuulluu kaikki joukot mitä voi "konkreettisesti keksiä". Helposti herää epäilys, että kenties kaikki $\mathbb{R}^n$:n osajoukot ovat mitallisia. Myöhemmin kuitenkin näemme, että valinta-aksioomalla voi osoittaa ei mitallisien joukkojen olemassaolon. Siitä huolimatta sopii arvostaa miten tehokkaaasti *numeroituva* yhdiste ja leikkaus antavat meille lisää mitallisia joukkoja.

Koska joukon mitallisuus säilyy numeroituvissa yhdisteissä ja leikkauksissa, tiedämme että avoimien joukkojen numeroituva leikkaus on mitallinen ja suljettujen joukkojen numeroituva yhdiste on mitallinen. Näistä voi taas ottaa numeroituvia yhdisteitä ja leikkauksia tai komplementteja. Mitallisten joukkojen määrä tuntuu "kasvavan rajatta". Esimerkiksi seuraavat joukot kuuluvat kaikki Lebesgue mitallisiin joukkoihin:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_\sigma\text{-joukot} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i, \quad F_i \text{ suljettu} \quad (\text{esim. } \mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b]) \\
&\mathcal{G}_\delta\text{-joukot} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i, \quad G_i \text{ avoin} \quad (\text{esim. } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b]) \\
&\mathcal{F}_{\sigma\delta}\text{-joukot} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_j,\ A_j \in \mathcal{F}_\sigma \\
&\mathcal{G}_{\delta\sigma}\text{-joukot} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_j,\ B_j \in \mathcal{G}_\delta \\
&\text{jne.}
\end{aligned}$$

Perheellä $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ on siis omanlaisensa sisäinen "rakenne" – aivan kuten avoimimien tai suljettujen joukkojen perheillä on "rakenteensa". Rakenne ei millään tavalla riipu tiedosta mitä joukkoja varsinaisesti perheeseen kuuluu; se vain kertoo jotain niiden välisistä suhteista. Esimerkiksi, riippumatta siitä mitkä joukot ovat avoimia, niin tiedämme (tai määräämme) että niiden mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset ovat myös avoimia (Topo II). Mitallisuuden tapauksessa, rakenne koostuu kolmesta osasta: Riippumatta siitä mitkä joukot ovat mitallisia, niin mitallisuus säilyy komplementissa. Samoin se säilyy myös numeroituvissa yhdisteissä. Viimeiseksi, riippumatta siitä mikä käsitys meillä on joukkojen ”suuruudesta”, tai mitkä joukot ovat mielestämme ”mitallisia”, niin yksi erityinen joukko on varmasti nollamittainen, eli mitallinen: tyhjä joukko $\emptyset$. Siksi sen saa olettaa erikseen kuuluvan mitallisten joukkojen rakenteeseen. [9]

Näin päädymme mittateorian aksiomatisointiin:

Määritelmä 1.36. Olkoon X mikä tahansa joukko. Perhe $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on X:n *σ-algebra* (”sigma-algebra”), jos

(a) $\emptyset \in \Gamma$;

(b) $A \in \Gamma \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \Gamma$;

(c) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Huomautus 1.37. (1) Jos Γ on σ-algebra ja $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, niin myös $\bigcap_i A_i \in \Gamma$, sillä

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \big(A_i^c\big)^c = \big(\bigcup_{i=1} A_i^c\big)^c \in \Gamma.$$

(2) Olemme todistaneet: Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra (Lauseet 1.22, 1.23, 1.30).

(3) $\mathcal{P}(X)$ on suurin X:n σ-algebra; $\{\emptyset, X\}$ on pienin X:n σ-algebra; $A \subset X$ (kiinnitetty) $\Rightarrow$ $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ on X:n σ-algebra.

Palataan ideaan jolla tämä kappale lähti liikkeelle: järjestelmälliseen numeroituvien yhdisteiden ja leikkausten ottamiseen avoimista ja suljetuista joukoista. Ideaa voisi kuvitella – ja sen voi tehdä matemaatiisen täsmällisesti – ”iteroivansa numeroituvan monta kertaa”. Herää kysymys: saako näin kaikki Lebesgue mitalliset joukot? Vastaus on ei. Mutta sillä tavoin saa kyllä erään suppeamman sigma-algebran: Borel joukot. Se on tärkeä Lebesgue mitallisten joukkojen osaperhe esimerkiksi siksi, että jokainen Lebesgue mitallinen joukko E voidaan esittää yhdisteenä $E = B \cup N$, missä B on Borel joukko, ja N on nollamittainen joukko. Erityisesti siis Borel joukot eivät sisällä kaikkia nollamittaisia joukkoja!

Käytämme Borel joukoista abstraktimpaa määritelmää:

Määritelmä 1.38. *Borel-joukkojen perhe* $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.

Periaatteessa voisi käydä niin, että ei ole olemassa mitään *pienintä* sigma-algebraa joka sisältää suljetut joukot. *Sigma-algebran rakenteesta kuitenkin seuraa, että aina löytyy pienin sigma algebra joka sisältää mitkä tahansa annetut joukot* (tässä tapauksessa suljetut).

Olemassaolon todistus. Merkitään

$$\boxed{\mathcal{B} = \bigcap \{\Gamma : \Gamma \text{ on } \mathbb{R}^n\text{:n } \sigma\text{-algebra},\ \Gamma \text{ sisältää suljetut joukot}\}.}$$

Näin määritelty σ-algebrojen leikkaus $\mathcal{B}$ on itse σ-algebra, sillä

[9] Edes yksiötä $\{x\}$, missä $x \in \mathbb{R}^n$ ei välttämättä sovi automaattisesti olettaa mitalliseksi. Voihan olla, että ”massa” on jotenkin konsentroitunut siihen pisteeseen (katso Diracin mitta alla).

(a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

(b) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \Gamma \ \forall \Gamma \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$;

(c) $A_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Gamma \ \forall \Gamma \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Ensinnäkin, sigma-algebrojen leikkaus on epätyhjä, sillä löytyy ainakin yksi sigma-algebra, esim. $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ joka sisältää suljetut joukot. Näin ollen $\mathcal{B}$ sisältää suljetut joukot.

Konstruktiosta seuraa että $\mathcal{B}$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot (jos Γ on mikä tahansa toinen, se on osana leikkausta, joten se sisältää $\mathcal{B}$:n), joten

$$\boxed{\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n = \mathcal{B}\,.}$$

Avoimet, suljetut, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, jne. joukot ovat Borel-joukkoja.

Lause 1.39. *Jokainen Borel-joukko on Lebesgue-mitallinen.*

Todistus. Mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on σ-algebra ja sisältää suljetut joukot, joten

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n.$$

□

1.11 Aksiomaattista mittateoriaa

Kuten aksiomatisoimme mitallisten joukkojen perheen rakenteen, voimme aksiomatisoida mitta kuvauksen. Nämä mitan ja mitallisuuden ominaisuudet ovat itseasiassa ainoat jota tarvitaan (abstraktin) integrointiteorian konstruoimiseen.

Määritelmä 1.40. Olkoon Γ X:n σ-algebra. Funktio $\mu\colon \Gamma \to [0,+\infty]$ on *mitta* X:ssä, jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, erillisiä $\Rightarrow \mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. ”täysadditiivisuus”

Kolmikko (X,Γ,μ) on *mitta-avaruus*.

Huomautus 1.41. 1. Mitta μ on myös *monotoninen*:

$$A, B \in \Gamma,\ A \subset B \Rightarrow 0 \le \mu(A) \le \mu(B).$$

Syy: $A,\ B \setminus A \in \Gamma$ erillisiä, $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge \mu(A).$$

2. $A, B \in \Gamma,\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Mitta μ on *todennäköisyysmitta* (lyhyemmin tn-mitta), jos $\mu(X) = 1$.

Esimerkki 1.42. (1) n-ulotteinen Lebesgue-mitta

$$m_n\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$$

on mitta (ei tn-mitta).
Syy: $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra ja m on täysadditiivinen.

(2) Olkoon $X \neq \emptyset$ mielivaltainen joukko. Kiinnitetään $x \in X$ ja asetetaan kaikilla $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Silloin $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on tn-mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa $x \in X$).
Syy: (a) $\mathcal{P}(X)$ on σ-algebra.
(b) Olkoot $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N}$, erillisiä (ts. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$). Silloin

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

sillä

$$\begin{cases} x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \ \Rightarrow \ \text{molemmat puolet } = 0 \\ \\ x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \overset{\text{erill.}}{\Longrightarrow} \exists \text{ täsm. yksi } j_0 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x \in A_{j_0} \ \Rightarrow \ \text{molemmat puolet } = 1. \end{cases}$$

(3) $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \mu(A) = 0\ \forall A \subset X$, on mitta.

(4) Olkoot $a_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N}$, s.e. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Asetetaan kaikilla $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} a_j.$$

Tällöin $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ on tn-mitta (HT).

Määritelmä 1.43. Olkoon X mikä tahansa joukko. Kuvaus $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on *ulkomitta* X:ssä, jos

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Jos avaruus X on äärellismittainen $\mu(X) < \infty$, silloin voimme jälleen määritellä sisämitan $\mu_*(A) := \mu(X) - \mu^*(X \setminus A)$, ja siten mitallisuuden: $E \subset X$ on μ^*-mitallinen jos $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

Jos $\mu(X) = \infty$, niin **mitallisuus** voidaan määritellä suoraan Carathéodoryn ehdolla: $E \subset X$ on μ^*-mitallinen jos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \quad (\forall A \subset X) \tag{1.28}$$

Merkitään

$$\mathcal{M}_{\mu^*}(X) = \{E \subset X \colon E\ \mu^*\text{-mitallinen}\}$$

tai lyhyemmin $\mathcal{M}(X)$, jos μ^* on selvä asiayhteydestä.

Huomautus 1.44. $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra X:ssä ja rajoittuma

$$\mu^*|\mathcal{M}(X)\colon \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$$

on mitta.

Lukija voi lukea materiaalin liiteosiosta lisää esimerkiksi Hausdorffin mitasta.

1.12 Mitan konvergenssi

Mitan konvergenssitulokset ovat äärimmäisen tärkeitä ja hyödyllisiä. Itse asiassa, seuraavan lauseen ominaisuus on yhtäpitävä *numeroituvan* täysadditiivisuuden kanssa[10].

Olkoon $X \neq \emptyset$, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ja $\mu\colon \Gamma \to [0, +\infty]$ mitta.

Lause 1.45 (Mitan konvergenssi)**.** *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots,$ kasvava jono (ts. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$ (μ-)mitallisia). Tällöin*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Huom.: Koska $A_j \in \Gamma$ $\forall j \in \mathbb{N}$ niin $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Todistustekniikka on aivan sama kuin Lemmassa 1.31.

Todistus. Ensin esitämme yhdisteen erillisenä yhdisteenä:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{erill. mitall.}}, \quad A_0 = \emptyset \quad \text{(sopimus)}$$

Sen jälkeen mitan täysadditiivisuudesta seuraa[11], että

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})}_{=A_k}\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

□

Komplementtien avulla on helppo johtaa vastaava konvergenssitulos laskeville jonoille. Huomaa kuitenkin kriittinen oletus $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$..

Lause 1.46. *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots,$ vähenevä jono (ts. $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (μ-)mitallisia). Jos lisäksi $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, niin silloin*

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Huom.: Γ σ-alg. $\Rightarrow$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

[10] Äärellinen täysadditiivisuus ja mitan jatkuvuus takaa numeroituvan täysadditiivisuuden.

[11] Itse asiassa subadditiivisuus ja äärellinen täysadditiivisuus riittää, kuten Lemmassa 1.31.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\mu(A_1) < \infty$. Ideana on muuttaa vähenevä joukkojono kasvavaksi. Se onnistuu komplementeilla. Merkitään $B_j = A_1 \setminus A_j$. Tällöin mitalliset joukot B_j ovat mitallisia ja muodostavat kasvavan jonon $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$. Lauseen 1.45 mukaan

$$\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j). \tag{1.29}$$

Tämä on nyt helppo muuttaa konvergenssitulokseksi alkuperäiselle jonolle:

$$\begin{aligned} \mu\big(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) &= \lim_{j\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_j) \\ \Leftrightarrow \mu(A_1) - \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) &= \lim_{j\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_j) \\ \Leftrightarrow \mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) &= \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) \qquad (1.30) \end{aligned}$$

□

Huomautus 1.47. Ehto $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$ on välttämätön. Esim. Olkoon $A_j = [j, \infty)$, $j \in \mathbb{N}$. Näiden joukkojono on laskeva $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, mutta koska $m_1(A_j) = \infty$ kaikilla j, niin $\lim_{j\to\infty} m_1(A_j) = \infty$. Kuitenkin joukkojen leikkaus on tyhjä, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset$, joten sen mitta on nolla.

Huomautus 1.48. (Tn-teoriassa tärkeä sovellus) Borel-Cantelli lemma: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A_j \in \Gamma$, $j \in \mathbb{N}$, ja

$$A = \{x \in X : x \in A_j \text{ äärettömän monella indeksillä } j \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \;\Rightarrow \mu(A) = 0.$$

(HT)

1.13 Ei-(Lebesgue-)mitallinen joukko $\mathbb{R}$:ssä

Lause 1.49. *(Vitali, 1905)*
$$\operatorname{Leb}\mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
eli on olemassa joukko $E \subset \mathbb{R}$, joka ei ole Lebesgue-mitallinen.

Ideana on löytää joukko $B \subset \mathbb{R}$, $0 < m^*(B) < \infty$, ja B:n ositus
$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
erillisiin joukkoihin A_i s.e.
$$m^*(A_i) = m^*(A_1) \ \forall i.$$
Tällöin jonkin joukoista A_i on oltava ei-mitallinen. Yksi tapa varmistaa, että joukoilla A_i on sama ulkomitta, on pyrkiä valitsemaan
$$A_i = A + x_i$$
jollakin (kiinteällä) joukolla $A \subset \mathbb{R}$ ja $x_i \in \mathbb{R}$ ja käyttää ulkomitan siirtoinvarianssia.

Todistus. Tarkastellaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, jonka alkiot ovat ekvivalenssiluokkia $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Määritelmän mukaan
$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q},$$
eli voidaan myös kirjoittaa $E(x) = x + \mathbb{Q}$.

Valitaan nyt jokaisesta ekvivalenssiluokasta $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, täsmälleen yksi edustaja $a \in E(x)$, siten että se kuuluu väliin $[0, 1]$. (Edustajan määritelmästä seuraa, että $E(a) = E(x)$.) Olkoon A näiden *edustajien joukko.*

Joukot $A + r$, $r \in \mathbb{Q}$, ovat erillisiä:
$$\begin{aligned} x \in (A+r) \cap (A+s),\ r, s \in \mathbb{Q} &\Rightarrow x = a_1 + r \ \text{ ja } \ x = a_2 + s, \quad a_1, a_2 \in A \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow a_1 \sim a_2 \ \Rightarrow \ E(a_1) = E(a_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \quad \text{(koska valittiin \underline{täsm.} yksi alkio)} \\ &\Rightarrow s = r. \end{aligned}$$

Muodostamme nyt motivoinnissa mainitun joukon seuraavasti:
$$B = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + r)$$
Selvästi $B \subset [-1, 2]$ joten $m^*(B) < \infty$. Osoitetaan seuraavaksi, että $[0, 1] \subset B$, mistä seuraa $m^*(B) \geq 1$. Olkoon $x \in [0, 1]$. Tällöin $x \in E(a)$ jollakin $a \in A \subset [0, 1]$. Täten $x - a = r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, eli $x \in B$.

Kuten jo alussa mainittiin, tästä seuraa, että joukko A ei voi olla mitallinen, sillä muuten täysadditiivisuuden perusteella pätisi
$$m(B) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \underbrace{m(A + r)}_{m(A)} \in \{0, \infty\},$$
mikä ei ole mahdollista. $\square$

Huomautus 1.50. 1. Myös $\mathbb{R}^n$:ssä kaikilla $n \geq 1$, voidaan konstruoida samantyyppinen esimerkki, joten

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2. Jos $A \subset \mathbb{R}$ on mikä tahansa joukko s.e. $m^*(A) > 0$, niin on olemassa sen osajoukko $B \subset A$ siten, että $B \notin \operatorname{Leb} \mathbb{R}$. (HT)

Lisätieto: (Banach-Tarski paradoksi, 1924): Mikä tahansa $\mathbb{R}^3$:n suljettu kuula $\overline{B}$ voidaan osittaa äärellisen moneen (erilliseen) palaan A_j

$$\overline{B} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

(sopivalla $m \geq 2$) ja sitten järjestellä palat uudelleen kuvauksilla

$$g_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; g_j(x) = y_j + T_j(x),$$

missä $y_j \in \mathbb{R}^3$ ja $T_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarinen kierto ($j = 1, \ldots, m$) niin, että syntyy kaksi $\overline{B}$:n kanssa samankokoista (s.o. sama säde) suljettua kuulaa. Koska Lebesguen mitta on siirto- ja kiertoinvariantti, tästä seuraa, että joukot $A_1, \ldots, A_m$ eivät voi (ainakaan kaikki) olla mitallisia.

Osa II: Integraali

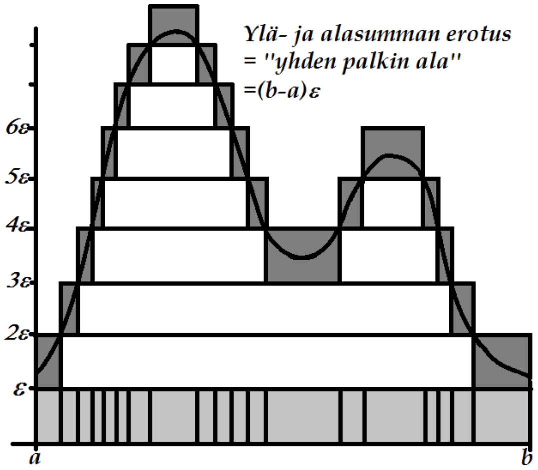
2 Lebesgue Integraali

Mittateoriamme on valmis ja voimme rakentaa integrointiteorian. Se käy hyvin pitkälti kuten jo esipuheessa esiteltiin. Siellä kävi ilmi, että *uusi integrointimetodimme voi toimia vain funktioilla, joiden alkukuvat* $f^{-1}[y,\infty)$ *(tai* $f^{-1}[y,\infty]$*) kaikilla* $y \in \mathbb{R}$ *ovat sellaisia joukkoja, joille osaamme määrätä mitan, eli Lebesgue mitallisia.* Tämä tarjoaa luonnollisen määritelmän "funktiolle jota voi integroida".

2.1 Vaakapalkki-integrointi

Vaakapalkkien mitallisuus

Keskitymme ensin positiivisen funktion integraaliin, sillä yleinen funktio f voidaan aina esittää kahden positiivisen funktion erotuksena: $f = f^+ - f^-$, missä $f^+ := \max\{f, 0\}$ ja $f^- := \max\{-f, 0\}$. Näin ollen f:n integraalin voi määritellä positiivisten funktioiden integraalien erotuksena. Tästä lisää myöhemmin.



Mitä tahansa rajoitettua funktiota f voi aina ylä-Riemann-integroida, $\overline{\int}_a^b f(x)\,dx$, ja ala-Riemann-integroida, $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx$. Samoin, kuten jo esipuheessa nähtiin, yleisen funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ (mahdollista) integraalia voi aina arvioida "vaakapalkeilla" sekä ylhäältä että alhaalta. Kummassakin tapauksessa kohtaa haasteen tutkia vaakapalkin $f^{-1}[k\varepsilon,\infty] \times [\varepsilon(k-1), \varepsilon k] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mittaa. Mutta meillähän on nyt tapa arvioida mielivaltaisen joukon mittaa $\mathbb{R}^{n+1}$:ssä. Voimme siis sanoa, että kyseisen vaakapalkin, jonka mitalllisuutta emme vielä tiedä, ala on korkeintaan $m^*_{n+1}(f^{-1}[k\varepsilon,\infty] \times [\varepsilon(k-1), \varepsilon k])$ ja vähintään $m_{n+1\,*}(f^{-1}[k\varepsilon,\infty] \times [\varepsilon(k-1), \varepsilon k])$.

Tarkistamme, että palkit $f^{-1}[k\varepsilon,\infty] \times [\varepsilon(k-1), \varepsilon k]$ ovat todellakin mitallisia joukkoja joiden mitta saadaa "kanta kertaa korkeus" -periaatteella.

Lemma 2.1. *Olkoon joukko* $A \subset \mathbb{R}^p$ m_p*-mitallinen ja joukko* $J \subset \mathbb{R}^q$ *jokin q-väli. Tällöin karteesinen tulo* $A \times J \subset \mathbb{R}^{p+q}$ *on* m_{p+q}*-mitallinen ja pätee* $m_{p+q}(A \times J) = m_p(A)\ell(J)$*.*

Heuristinen perustelu. Yleisesti, karteesinen tulo $A \times B$ on tavallaan (yleinen) "laatikko". Jos tiedämme, että laatikon kannan pituus on *korkeintaan* a ja laatikon korkeus on *korkeintaan*

b, niin toki laatikon ala voi olla *korkeintaan* ab. Samoin, jos kannan pituus on *vähintään* a' ja laatikon korkeus on *vähintään* b', niin toki laatikon ala on *vähintään* $a'b'$. Näin ollen pätee $a'b' \leq m_*(A \times B) \leq m^*(A \times B) \leq ab$. Jos siis joukot A ja B ovat mitallisia, niin $a' = a$ ja $b' = b$, ja täten $m(A \times B) = ab$.

Todistus. Meidän on osoitettava, että $m^*_{p+q}((I \times I') \cap (A \times J)) \leq m_{p+q*}((I \times I') \cap (A \times J))$, missä I on p-väli ja I' on q-väli (mikä tahansa (p+q)-väli voidaan esittää niiden tulona). Voimme olettaa, että $I' = J$ [12].

Aluksi huomaamme, että $m^{p+q*}(A \times J') \leq m^{p*}(A)\ell(J')$. Tämä johtuu siitä, että jos $\mathcal{F} = \{I\}$ on joukon A Lebesguen peite niin $\{I \times J'\}$ on tulon $A \times J'$ Lebesguen peite.

Lisäksi, edellisen nojalla, pätee

$$\begin{aligned} m^*_{p+q}((I \times J) \cap (A \times J)) &:= \ell(I \times J) - m^*_{p+q}(\underbrace{(I \times J) \setminus (A \times J)}_{(I \setminus A) \times J}) \\ &\geq \ell(I)\ell(J) - m^*_p(I \setminus A)\ell(J) \\ &= \underbrace{(\ell(I) - m^*_p(I \setminus A))}_{m^*_p(I \cap A)}\ell(J). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Nyt jos joukko A on mitallinen, voimme yhdistää nämä arviot ja näemme, että

$$\begin{aligned} m^*_{p+q}(\underbrace{(I \times J) \cap (A \times J)}_{(I \cap A) \times J}) &\leq m^*_p(I \cap A)\ell(J) \\ &= m_{p*}(I \cap A)\ell(J) \\ &\leq m_{p+q*}((I \times J) \cap (A \times J)), \end{aligned} \tag{2.32}$$

mikä oli todistettava. □

Integraali

Tiedämme nyt, että vaakapalkki $f^{-1}[k\varepsilon, \infty] \times [\varepsilon(k-1), \varepsilon k]$ on $(m_{n+1}-)$mitallinen kun alkukuva $f^{-1}[k\varepsilon, \infty]$ on (m_n-)mitallinen, ja sen mitta on $\varepsilon m_n(f^{-1}[k\varepsilon, \infty])$.

Viedään loppuun ylä- ja ala-arviointien rajankäyti kun $\varepsilon \to 0$. *Kun maali-avaruus on ositettu ε-jaolla, näin saatujen ala-vaakapalkkien yhteenlaskettu ala on Lemman 2.1 nojalla*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(f^{-1}[k\varepsilon, \infty])\varepsilon. \tag{2.33}$$

Lopuksi, kuten Riemann-integraalissa, haluamme päästää jakoparametrin ε nollaan. Huomaamme, että itse asiassa summa (2.33) on funktion $t \mapsto m(f^{-1}[t, \infty])$ eräs Riemann-alasumma! Lisäksi, koska $[t, \infty] \supset [s, \infty]$ kun $t < s$, kyseessä on *laskeva* funktio. Muistamme aikaisemmilta kursseilta, että monotoninen funktio on Riemann-integroituva. (Todistus myös materiaalin lopun liitteessä.) Täten funktio $t \mapsto m(f^{-1}[t, \infty])$ on Riemann-integroituva. Voimme siis päätellä, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(f^{-1}[k\varepsilon, \infty])\varepsilon \nearrow (R) \int_0^{\infty} m(f^{-1}[t, \infty]) \, dt, \tag{2.34}$$

[12] $(I \times I') \cap (A \times J) = (I \cap A) \times (I' \cap J)$, joten vaihdamme ”$J \to I' \cap J$”

kun jakoparametri $\varepsilon \searrow 0$. (R viittaa *Riemann*-integraaliin joka tarvittaessa tulkitaan epäoleellisena.)

Voisimme tehdä saman rajankäynnin ylävaakapalkeilla, mutta kuten jo esipuheessa huomattiin vaakapalkkien hienous on siinä että päädymme automaattisesti samaan raja-arvioon (kunhan alkukuvat $f^{-1}[t,\infty]$ ovat mitallisia). Halukkaat voivat käydä itse läpi täsmälliset yksityiskohdat.

Nyt voimme antaa Lebesguen määritelmän (positiivisen) funktion integraalille:

Määritelmä 2.2 (Lebesguen integraali)**.** Olkoon joukko E mitallinen ja $f : E \to [0,\infty]$ funktio jonka alkukuvat $f^{-1}[t,\infty]$ ovat mitallisia joukkoja kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Sen Lebesguen integraali (yli joukon E) on

$$\int_E f := (R)\int_0^\infty m(f^{-1}[t,\infty])\; dt. \tag{2.35}$$

Jos $E = \mathbb{R}^n$, voidaan käyttää merkintää $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int f$. Voidaan myös merkitä $\int_E f(x)\; dm(x)$ tai $\int_E f(x)\; dm_n(x)$, ja jos E on 1-väli niin $\int_a^b f(x)\; dx$.

Huomautus. Funktion Lebesgue integraali lasketaan harvemmin kaavalla $(R)\int_0^\infty m(f^{-1}[t,\infty])\; dt$ (joka kylläkin on hyödyllinen teoreettinen apuväline). Käytännön laskut voi usein hoitaa Analyysin Peruslauseella (esimerkkejä myöhemmin).

Koska alkukuvien $f^{-1}[a,\infty]$ mitallisuus on ehdottoman tärkeää jotta vaapalkki-integroinnissa olisi järkeä, on ehdosta parasta luoda määritelmä. Myöhemmin laajennamme integraalin myös vaihtuvamerkkisiin funktioihin, joten sallimme määritelmässä jo negatiiviset arvot.

Määritelmä 2.3 (Mitallinen funktio)**.** Merkitään $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Sanomme, että f on mitallinen funktio (lyhyesti mitallinen) jos alkukuva $f^{-1}[a,\infty] \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue mitallinen joukko kaikilla $a \in \dot{\mathbb{R}}$.

Muutama huomio määritelmästä:

0. Vielä kerran: Mitalliseen funktioon voi soveltaa Lebesguen vaakapalkkimenetelmää. Mitallisen funktion ylä- ja alaintegraalit täsmäävät automaattisesti!
1. Joukko A on avoimen joukon $\mathbb{R}$ ja "äärettömyyksien" alkukuvien yhdisteenä mitallinen joukko:
$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(-\infty).$$
2. Jos rajoitamme kuvauksemme mitalliseen osajoukkoon $B \subset A$, rajoitettu kuvaus $f|B$ on mitallinen joukossa B: tämä seuraa perusidentiteetistä joka pätee rajoittuman alkukuvalle
$$(f|B)^{-1}([a,\infty]) = \underbrace{B}_{\text{mitallinen}} \cap f^{-1}[a,\infty].$$

Vaikka vaakapalkkimetodia silmällä pitäen edellinen määritelmä vaikuttaa luontevimmalta, on itse asiassa monia yhtäpitäviä vaihtoehtoja sille mitkä alkukuvat vaadimme mitallisiksi.

Lause 2.4 (Karakterisaatio)**.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä.*

(1) $f^{-1}[a,\infty] = \{x \in A\colon f(x) \geq a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$.

(2) $f^{-1}(a,\infty] = \{x \in A\colon f(x) > a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(3) $f^{-1}[-\infty,a) = \{x \in A\colon f(x) < a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(4) $f^{-1}[-\infty, a] = \{x \in A\colon f(x) \le a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(5) $f^{-1}(G)$ *on mitallinen* <u>*kaikilla avoimilla*</u> $G \subset \mathbb{R}$*;*
ja lisäksi alkukuvat $f^{-1}(\infty)$ *ja* $f^{-1}(-\infty)$ *ovat mitallisia.*

Todistus. Komplementilla E^c tarkoitetaan tässä todistuksessa komplementtia A:ssa eli erotusta $A \setminus E$. Tämän vuoksi A halutaan olettaa mitalliseksi.

Kaiken takana on yksinkertainen huomio, että alkukuva ”kunnioittaa joukko-operaatioita”:

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c, \quad f^{-1}\big(\bigcup_\alpha E_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\big(\bigcap_\alpha E_\alpha\big) = \bigcap_\alpha f^{-1}(E_\alpha).$$

<u>(1)⇒(2)</u>: Puolisuora $(a, \infty]$ voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä $\bigcup_{n=1}^\infty [a + 1/n, \infty]$, joten $f^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}[a + 1/n, \infty]$ on mitallinen.

<u>(1)⇒(3)</u>: Puolisuora $[-\infty, a)$ voidaan puolestaan esittää komplementtina $[a, \infty]^c$, joten päättelemme, että alkukuva $f^{-1}[-\infty, a) = (f^{-1}[a, \infty])^c$ on mitallinen, kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

<u>(1)⇒(4)</u>: Seuraa identiteetistä $[-\infty, a] = (a, \infty]^c = \big(\bigcup_{n=1}^\infty [a + 1/n, \infty]\big)^c$.

<u>(1)⇒(5)</u>: Voimme käyttää kaikkia ominaisuuksia (1)-(4). Tarvitsee vain muistaa perusfakta, että yleisesti avoin joukko voidaan aina esittää numeroituvana yhdisteenä avoimista n-väleistä, eli meidän tapauksessamme 1-väleistä (L. 1.33). Näin ollen mielivaltaisen avoimen joukon alkukuvan

$$f^{-1}(G) = \bigcup_n f^{-1}(I_n)$$

mitallisuus palautuu välien alkukuvien mitallisuuteen. Mutta mielivaltainen väli (a, b) voidaan esittää leikkauksena $[-\infty, b) \cap (a, \infty]$. Kohtien (2) ja (3) ansiosta tämän alkukuva tiedetään mitallisiksi.

<u>(i)⇒(1)</u>: (HT) □

Viidennestä karakterisaatiosta seuraa, että jatkuviin funktiohin voi soveltaa Lebesgue-integrointia.

Korollari 2.5 (Jatkuvan funktion mitallisuus)**.** *Olkoon* $E \subset \mathbb{R}^n$ *mitallinen* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *jatkuva. Silloin* f *on mitallinen.*

Todistus. *Jatkuvuuden karakterisaatio avoimien joukkojen avulla* (Topo I): Kuvaus $f\colon E \to \mathbb{R}$ on jatkuva jos ja vain jos avoimen joukon $G \subset \mathbb{R}$ alkukuva $f^{-1}G$ on <u>avoin E:ssa</u>. Lisäksi muistamme, että joukko $f^{-1}G$ on avoin E:ssa jos ja vain jos löytyy avoin $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $f^{-1}G = V \cap E$.

Nyt Korollaari seuraa avoimen joukon mitallisuudesta (Lause 1.35).

Kommentti. Kohta (5) osoittaa, että funktion mitallisuus muistuttaa funktion jatkuvuuden määritelmää. Edellisen karakterisaation yksi seuraus on, että voisimme ottaa mitallisen funktion viralliseksi kriteeriksi avoimien joukkojen alkukuvien mitallisuuden. Kirjallisuudessa – erityisesti edistyneemmässä – kohta (5) valitaan usein mitallisuuden määritelmäksi. Ei silti kannata unohtaa mitallisuuden alkuperäistä motivaatiota ”funktiona jota voi integroida vaakapalkeilla”.

Tutkitaan aluksi integraalin ja mitallisten funktioiden perusominaisuuksia.

2.2 Integraalin perusominaisuuksia

Seuraava tärkeä tulos seuraa suoraan integraalin konstruktiosta.

Lause 2.6. *Olkoon $f : E \to [0, \infty]$, missä $E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$.*
Määritellään "graafijoukko" $\mathcal{G}(f) := \{(x, y) \in E \times [0, \infty) : 0 < y < f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jos f on mitallinen funktio, niin joukko $\mathcal{G}(f)$ on m_{n+1}-mitallinen joukko, ja pätee

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)). \tag{2.36}$$

Todistus. Konstruktion ala-vaakapalkkien yhdiste jakoparametrilla 2^{-m} on erillinen yhdiste

$$\mathcal{G}_m := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}[k/2^m, \infty] \times ((k-1)/2^m, k/2^m].$$

Piirtämällä kuva on helppo todeta, että $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}_{m+1} \subset \mathcal{G}(f)$ kaikilla m.

Toisaalta jos $(x, y) \in \mathcal{G}(f)$, eli $y < f(x)$, niin silloin löytyy $m \in \mathbb{N}$ siten, että $y < k/2^m \leq f(x)$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa, että $(x, y) \in f^{-1}[k/2^m, \infty] \times [(k-1)/2^m, k/2^m]$ eli $(x, y) \in \mathcal{G}_m$. Siispä

$$\mathcal{G}(f) = \bigcup_m \mathcal{G}_m.$$

Nyt huomataan, että $\mathcal{G}_m$ on mitallisten joukkojen $f^{-1}[k/2^m, \infty] \times [(k-1)/2^m, k/2^m]$ numeroituvana yhdisteenä mitallinen, joten niin on myös $\mathcal{G}(f)$. Lopuksi, mitan konvergenssin (Lause 2.24) ansiosta pätee

$$\begin{aligned} m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) &= \lim_{m\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}_m) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_{n+1}(f^{-1}[k/2^m, \infty] \times [(k-1)/2^m, k/2^m]) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m_n(f^{-1}[k/2^m, \infty])2^{-m} \qquad (2.37) \end{aligned}$$

Viimeinen raja-arvo on jo konstruktiossa tutuksi tulleen argumentin nojalla Riemann integraalin avulla ilmaistu Lebesgue integraali $(R) \int_0^\infty m(f^{-1}[t, \infty])\, dt$, eli todistus on valmis. □

Lause 2.7. *Oletetaan, että esiintyvät funktiot ovat sekä ei-negatiivisia että mitallisia ja esiintyvät joukot ovat mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja.*

(1) Jos $f \leq g$ niin $\int_E f \leq \int_E g$ (Monotonisuus)

(2) Jos $A \subset B$ niin $\int_A f \leq \int_B f$

(3) Jos $f(x) = 0$ $\forall x \in E$ niin $\int_E f = 0$

(4) Jos $m(E) = 0$ niin $\int_E f = 0$

(5) Jos $0 \leq a < \infty$ niin $\int_E af = a \int_E f$.

Todistus. (HT)

Seuraava perusominaisuus on äärimmäisen hyödyllinen. Lisäksi sen todistus käyttää mittateorialle ominaista arviointitekniikkaa (oikeastaan filosofiaa) joka tulee vastaan vielä monta kertaa muodossa tai toisessa.

Lause 2.8. *Olkoon $f\colon E \to [0,\infty]$ mitallinen ja $\int_E f < \infty$.*
Silloin $m(f^{-1}(\infty)) = m(\{x \in E : f(x) = \infty\}) = 0$. (Tällöin sanotaan, että $f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in E$. Tästä lisää myöhemmin.)

Todistus. Vastaoletus: joukko $f^{-1}(\infty)$ ei ole nollamittainen. Nyt joukko $f^{-1}(\infty) \times (0,M) \subset \mathcal{G}(f)$ kaikilla $M > 0$, joten

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \geq m_{n+1}(f^{-1}(\infty) \times (0,M)) = m_n(f^{-1}(\infty))M \quad (M > 0). \tag{2.38}$$

Koska integraali oletettiin äärelliseksi tämä on ristiriita. □

Lause 2.9. *Olkoon $f\colon E \to [0,\infty]$ mitallinen ja $\int_E f = 0$.*
Silloin $m(f^{-1}(0,\infty]) = m(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$. (Eli $f(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in E$.)

Todistus. Vastaoletus: joukko $f^{-1}(0,\infty]$ ei ole nollamittainen. Silloin löytyy $k \in \mathbb{N}$ siten, että $m(f^{-1}(1/k,\infty]) > 0$ (HT). Nyt $f^{-1}(1/k,\infty] \times (0,1/k) \subset \mathcal{G}(f)$ joten voimme arvioida

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \geq m_{n+1}\big(f^{-1}(1/k,\infty] \times (0,1/k)\big) = m_n(f^{-1}(1/k,\infty])\frac{1}{k} > 0, \tag{2.39}$$

mikä on ristiriita. □

2.3 Mitallisen kuvauksen ominaisuuksia

Emme tällä kurssilla varsinaisesti tarvitse vektoriarvoista mitallisuutta, mutta sitä kannattaa silti tutkia vähintään harjoituksen vuoksi.

Määritelmä 2.10 (Vektoriarvoisen kuvauksen mitallisuus)**.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on *mitallinen* (σ-algebran $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ suhteen), jos $f^{-1}G$ on (Lebesgue-)mitallinen kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}^m$.

Huomautus 2.11. Vektoriarvoisessa tapauksessa kuvaus ei voi saada "äärettömyyksiä". Siksi meidän ei tarvitse muotoilla skalaaritapausta vastaavia kohtia (ii) ja (iii). Lisäksi, voimme käyttää tietoa että avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä n-väleistä (L. 1.33), joten $f^{-1}(G) = \bigcup_n f^{-1}(I_n)$. Näin ollen vektoritapauksessa *riittää tarkistaa n-välien alkukuvien mitallisuus.* Tätä voi pitää Karakterisaation 2.4 vektoriarvoisena vastineena.

<u>Lisätieto:</u> Vaihtoehtoinen tapa määritellä vektoriarvoisen kuvauksen $f = (f_1, \dots f_m)$ mitallisuus on vaatia sen komponenttien $f_i, i = 1, \dots m$ mitallisuus (Lause 2.14). Täten vektoriarvoisen kuvauksen mitallisuus palautuu loppujen lopuksi skalaaritapaukseen.

Lause 2.12. *Jatkuva funktio $f\colon E \to \mathbb{R}^m$* mitalliselta *joukolta E on mitallinen kuvaus.*

Todistus. Kuten edellä. (HT)

Seuraava tulos on hyödyllinen ja sen todistus on hyvä pieni käsiteharjoitus.

Lause 2.13. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jatkuva. Silloin $g \circ f$ on mitallinen.*

Todistus on suoraviivainen sovellus määritelmiä: olkoon $G \subset \mathbb{R}^k$ avoin. Yhdistetyn funktion alkukuva $(g \circ f)^{-1}G$ voidaan kirjoittaa muodossa $f^{-1}(g^{-1}G)$. Koska g on jatkuva, alkukuva $g^{-1}G$ on avoin. Koska f on mitallinen, avoimen joukon $g^{-1}G$ alkukuva $f^{-1}(g^{-1}G)$ on mitallinen. Näin ollen yhdistetty funktio $g \circ f$ on mitallinen. $\square$

Varoitus: Vaikka mitalliset funktioita koskevat tulokset muistuttavat osittain eräitä jatkuvien funktioiden tuloksia niin analogia ei ole täydellinen: Mitallisten funktioiden f ja g yhdiste $g \circ f$ ei välttämättä ole mitallinen (vertaa: jatkuvien yhdiste on jatkuva). Tiedä myös, että mielivaltaisen Lebesgue-mitallisen joukon alkukuva ei välttämättä ole mitallinen.

Edellistä tulosta apuna käyttäen on mukava osoittaa vektoriarvoisen mitallisen kuvauksen karakterisaatio sen komponenttien mitallisuuden avulla.

Notaatio: Jos $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, niin merkitsemme

$$f = (f_1, \ldots, f_m),\ f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big),$$

missä

$$f_j\colon A \to \mathbb{R},\ f_j(x) = (P_j \circ f)(x) \text{ ja } P_j(y_1, \ldots, y_m) = y_j \ (P_j \text{ projektio } j\text{:nnelle koord.}).$$

Lause 2.14. *Vektoriarvoinen kuvaus* $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon A \to \mathbb{R}^m$ *on mitallinen jos ja vain jos sen komponenttikuvaukset* f_j *ovat mitallisia kaikilla* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Todistus. $\boxed{\Rightarrow}$ Jos f on mitallinen, niin $f_j = P_j \circ f$ on mitallinen (L. 2.13), sillä P_j jatkuva.

$\boxed{\Leftarrow}$ Oletetaan, että f_j on mitallinen kaikilla j. Tehtävämme helpottuu huomattavasti kun muistamme Huomion 2.11, jonka ansiosta *riittää tarkistaa n-välin alkukuvan* $f^{-1}(I_n)$ mitallisuus. Huomaamme, että n-väli voidaan esittää projektioiden alkukuvien leikkauksena: $I = I_1 \times \cdots \times I_m = \bigcap_{j=1}^m P_j^{-1} I_j$[13].

Tämän esityksen avulla voimme päätellä, käyttäen oletusta koordinaattifunktion $f_j = P_j \circ f$ mitallisuudesta, että alkukuva

$$f^{-1}I = \bigcap_{j=1}^{m} f^{-1}P_j^{-1}I_j = \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{(P_j \circ f)^{-1}I_j}_{\text{mitallinen}},$$

on mitallinen. $\square$

Lause 2.15. *Mitallisten funktioiden* $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ *summa ja tulo ovat mitallisia (mikäli määriteltyjä). Samoin* λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, *ja* $|f|^a$, $a > 0$, *ovat mitallisia.*

Todistus. $\boxed{\text{Summa.}}$ Ensin tapaus, jossa funktiot saavat äärellisiä arvoja: olkoot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia. Ovela, joskaan ei suoraviivainen, idea on kirjoittaa kuvaus $x \mapsto f(x) + g(x)$ yhdisteenä mitallisesta ja jatkuvasta kuvauksesta: $f + g = u \circ v$, missä

$$A \xrightarrow{v} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad v = (f, g) \quad \text{ja} \quad u(x, y) = x + y.$$

Nyt, Lauseen 2.14 mukaan, vektoriarvoinen kuvaus v on mitallinen, ja lisäksi u on selvästi jatkuva. Näin ollen Lauseen 2.13 nojalla yhdistetty kuvaus $f + g = u \circ v$ on mitallinen.

Lisätieto: Vektoriarvoisen summan mitallisuus, jossa $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$, todistuu identtisellä päättelyllä. Eli pätee tulos: Jos kuvaukset $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat mitallisia niin summa $f + g$ on mitallinen.

Nyt tapaus, jossa sallitaan äärettömyydet: olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja summa $f + g$ hyvin määritelty. [Summa $f + g$ on määritelty, jos missään $x \in A$ ei ole $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, tai päinvastoin.] Merkitään $f + g = h$. Tiedetään, että A on mitallinen. Haluamme soveltaa alkuosaa,

[13] Miksi? Koska $x \in I \Leftrightarrow x_j = P_j(x) \in I_j, \forall j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow x \in P_j^{-1}(I_j), \forall j = 1, \ldots, m$.

joten pyrimme poistamaan joukot, joissa joko f tai g saa äärettömyyksiä. Siksi muodostamme joukon $A_0 := A \setminus [f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(-\infty)]$, josta "äärettömyydet on poistettu". A on selvästi mitallinen.

Nyt voimme *soveltaa alkuosaa äärellisiin rajoittumiin* $f|A_0$ ja $g|A_0$, josta voimme päättelellä, että rajoittuma $h|A_0$ on mitallinen. Täten kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$ alkukuva $(h|A_0)^{-1}(G) = h^{-1}(G) \cap A_0 = h^{-1}(G)$ on mitallinen. Lisäksi äärettömyyksien alkukuvat

$$\begin{aligned} h^{-1}(+\infty) &= f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \ \text{ ja} \\ h^{-1}(-\infty) &= f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty) \ , \end{aligned}$$

ovat mitallisia[14]. Siispä summa $h = f + g$ on mitallinen.

$\boxed{\text{Tulo.}}$ Samoin (HT)

$\boxed{\lambda f}$ Erikoistapaus tulosta.

$\boxed{|f|^a}$ $|f|^a = u \circ f$, missä $u(x) = |x|^a$ jatkuva, jos $a > 0$. L. 2.13 $\Rightarrow$ $|f|^a$ on mitallinen. □

Muista kuinka helposti alkukuvien $f^{-1}[a, \infty]$ mitallisuudesta seurasi avoimien joukkojen alkukuvien mitallisuus. Syy oli siinä, että alkukuva kunnioittaa komplementteja, yhdisteitä ja leikkauksia. Miksi siis pysähtyä avoimiin joukkoihin? Esimerkiksi, suljettu joukko F on avoimen joukon F^c komplementti, joten suljetun joukon alkukuva $f^{-1}F = f^{-1}(F^{cc}) = (f^{-1}(F^c))^c$ on mitallinen. Samoin voimme päätellä, että $\mathcal{G}_\sigma$-joukon $\bigcap_i G_i$ alkukuva on mitallinen. Identtisesti myös $\mathcal{F}_\sigma$ joukon $\bigcup_i F_i$ alkukuva on mitallinen, ja niin edelleen. Kysymys kuuluu: kuinka pitkälle pääsemme?

Seuraavan tulos on aika ajoin hyödyllinen myöhemmillä kursseilla, mutta nyt kannattaa ennen kaikkea keskittyä sen todistusmetodiin. Idea on elegantti, mutta äärimmäisen abstrakti, mikä on seurausta Borel-joukkojen määritelmän abstraktiudesta.

Lause 2.16. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen. Silloin alkukuva $f^{-1}B$ on mitallinen kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \mathbb{R}^m$.*

Todistus. Miten lähestyisimme ongelmaa? Meidän kannattaa aloittaa kokoamalla kaikki joukot joiden alkukuva on mitallinen: määritellään perhe $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m \colon f^{-1}V \text{ mitallinen}\}$. Voimme nyt muotoilla väitteen yhtäpitävästi näin: Perhe Γ sisältää Borel-joukot.

Borel-joukkojen perhe määriteltiin pienimpänä σ-algebrana joka sisältää suljetut joukot. Olemme edellä todenneet, että suljettujen joukkojen alkukuva on mitallinen, joten ainakin suljetut joukot sisältyvät kokoelmaan Γ. Jos Γ "sattuisi" nyt olemaan σ-algebra, niin Borel-joukkojen *määritelmä* takaisi $\Gamma \supset \operatorname{Bor} \mathbb{R}^m$ ja todistus olisi valmis!

Osoitamme siis, että Γ toteuttaa σ-algebran aksioomat:

(1) $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ mitallinen $\Rightarrow$ $\emptyset \in \Gamma$,

(2) $V \in \Gamma \ \Rightarrow \ f^{-1}V^c = \underbrace{A}_{\text{mitallinen}} \setminus \underbrace{f^{-1}V}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow$ $V^c \in \Gamma$,

(3) $V_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}V_i}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \Gamma$.

Täten Γ on sigma-algebra joka sisältää suljetut joukot, joten pienin sigma-algebra joka sisältää suljetut joukot on Γ:n osaperhe. □

Huomaa miten kokoelman $\{V \subset \mathbb{R}^m \colon f^{-1}V \text{ mitallinen}\}$ σ-algebrallisuus, riippuu siitä, että alkukuva kunnioittaa komplementteja ja yhdisteitä.

[14]Ensimmäisen identiteettin perustelu: $h(x) = f(x) + g(x) = \infty$ jos ja vain jos $f(x) = \infty$ tai $g(x) = \infty$.

Korollari 2.17. *f mitallinen $\Rightarrow$ pisteen alkukuva on mitallinen.*

Lisätieto: Mitallinen kuvaus abstraktissa mittateoriassa
Olkoon X mielivaltainen joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra.
Määritelmä: Kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$ on *mitallinen* (σ-alg. Γ suhteen), jos $f^{-1}G \in \Gamma$ kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$.

2.4 Yksinkertaiset funktiot

Etsitään lisää integroituvia funktioita. Esitellään yksi tietyssä mielessä äärimmäisen yksinkertainen funktio.

Määritelmä 2.18 (Karakteristinen funktio)**.** Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $\chi_E\colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ joukon E karakteristinen funktio

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \notin E. \end{cases}$$

Ensimmäinen kysymys voisi olla: Milloin joukon E karakteristinen funktio χ_E on mitallinen?

Lemma 2.19. *Joukon E karakteristinen funktio χ_E on mitallinen funktio jos ja vain jos E on mitallinen joukko.*

Todistus. $\boxed{\Rightarrow}$ Jos funktio χ_E on mitallinen, niin määritelmän mukaan alkukuva $\chi_E^{-1}(0,\infty] = E$ on mitallinen.

$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon E mitallinen ja $a \in \mathbb{R}$. Helposti voi todeta, että pätee

$$\{x : \chi_E(x) \geq a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{jos } a \leq 0 \\ E, & \text{jos } a \in (0,1], \\ \emptyset, & \text{jos } a > 1, \end{cases}$$

Nämä joukot ovat mitallisia, joten χ_E mitallinen funktio. ☐

Niimpä mitallisen joukon E karakteristisella funktiolla on Lebesgue integraali. On helppo nähdä, että

$$\int \chi_E = m(E) \tag{2.40}$$

Vain astetta yleisempi funktioluokka on karakterististen funktioiden äärelliset lineaarikombinaatiot. Nämä n.k. yksinkertaiset funktiot ajavat käytännössä saman asian kuin "vaakapalkit" mutta ovat teknisesti tyylikäämpiä ja helpommin käsiteltäviä.

Määritelmä 2.20. (Yksinkertainen funktio) Funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ on *yksinkertainen*, jos sillä on esitys

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}}, \tag{2.41}$$

missä $a_i \in [0,\infty)$ ja $A_i, i = 1,2,\ldots k$, ovat *mitallisia* joukkoja.
Merkitään $Y = \{f \mid f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty) \text{ yksinkertainen}\}$.

Huomautus 2.21. 1. *Yksinkertainen funktio on mitallinen!* Tämä seuraa joko Lauseesta 2.15, tai huomiosta että alkukuvat $f^{-1}[a,\infty]$ ovat (äärellisiä) yhdisteitä joukoista $A_1, \dots, A_k$.

2. $f \in Y \;\Rightarrow\; f(x) \in [0,\infty)$ kaikilla x. Eli yksinkertainen funktio saa vain *äärellisiä* arvoja.

3. Jos f on yksinkertainen, se saa vain *äärellisen monta* eri arvoa.

4. Jos $f \in Y$ on yksinkertainen ja $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, niin $f\chi_E$ on yksinkertainen funktio.

Normaaliesitys. Yksinkertaisella funktiolla on aina monia eri esityksiä. Esimerkiksi $\chi_E = 1/2\chi_E + 1/2\chi_E = \chi_{E\cap F} + \chi_{E\cap F^c}$. Eräs näistä on kuitenkin erityisen hyödyllinen:
Olkoon $f \in Y$ ja f:n eri arvot $a_1, \dots, a_k \in [0,\infty)$. Silloin joukot

$$A_i = f^{-1}(a_i) \quad \text{ovat mitallisia ja } \textit{erillisiä.}$$

Näistä saatavaa esitystä

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{f^{-1}(a_i)},$$

kutsutaan *normaaliesitykseksi. Eli normaaliesityksessä joukot* $A_i, i = 1,2,\dots k$, *on valittu erillisiksi.*

Normaaliesityksen avulla on yksinkertaisinta laskea yksinkertaisen funktion integraali. Usein tämä tulos otetaan yksinkertaisesti määritelmäksi.

Lause 2.22. *Olkoon f positiivinen yksinkertainen funktio joka saa arvot $a_k \geq a_{k-1} \geq \dots \geq a_1 \geq 0$. Tällöin f:n* integraali *(yli $\mathbb{R}^n$: n) on*

$$\int f = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i), \qquad (\textit{muista } 0\cdot\infty = 0) \tag{2.42}$$

missä, $A_i = f^{-1}(a_i)$ ovat erillisiä.
Lisäksi, jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin f:n integraali yli joukon E on

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E). \qquad (\textit{muista } 0\cdot\infty = 0)$$

Todistus. Lauseen 2.6 mukaan

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)).$$

Valitaan normaaliesitys $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$ jossa joukot A_i ovat erillisiä (ja mitallisia). Tällöin myös karteesiset tulot $A_i \times (0,a_i)$ ovat erillisiä. Koska $\mathcal{G}(f) = E \cap \bigcup_i A_i \times (0,a_i)$, mitan täysadditiivisuuden nojalla pätee

$$m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) = \sum_i m_{n+1}\big((E \cap A_i) \times (0,a_i)\big).$$

Nyt huomio $\sum_i m_{n+1}(E \cap A_i \times (0,a_i)) = a_i m(A_i \cap E)$ viimeistelee todistuksen. $\square$

Lisätieto. Yhtälö (2.42) pätee ilman oletusta/valintaa, että A_i:t ovat erillisiä. (HT)

Integraali on lineaarinen karakterististen funktioiden suhteen:

Lause 2.23. *Olkoot $f, g \in Y$, E mitallinen ja $a \geq 0$ vakio. Silloin*

(i) $f + g \in Y$ *ja* $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$;

(ii) $af \in Y$ *ja* $\int_E af = a \int_E f$.

Todistus. Tilanne voidaan palauttaa tapaukseen jossa g on vain $b\chi_B$. Olkoon funktiolla f *normaali*esitys $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$, missä $\bigcup_k A_j = \mathbb{R}^n$ (valitaan $a_0 = 0$ jos tarpeen). Silloin, koska $1 = \sum_{j=1}^k \chi_{A_j}$, niin

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j} + b\chi_B \\ &= \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j} + \sum_{j=1}^k b\chi_{A_j}\chi_B. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Nyt $\chi_{A_j}\chi_B = \chi_{A_j \cap B}$, ja $\chi_{A_j} = \chi_{A_j \cap B} + \chi_{A_j \setminus B}$ joten

$$f + g = \sum_{j=1}^k (a_j + b)\chi_{A_j \cap B} + \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j \setminus B}. \tag{2.44}$$

Nyt joukot $A_j \cap B$ ja $A_i \setminus B$ ovat erillisiä kaikilla j, i, joten Lauseen 2.22 perusteella

$$\begin{aligned} \int_E f + g &= \sum_{j=1}^k (a_j + b) m(A_j \cap B) + \sum_{j=1}^k a_j m(A_j \setminus B) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j (m(A_j \cap B) + m(A_j \setminus B)) + \sum_{j=1}^k b m(A_j \cap B) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j m(A_j) + b m(B). \end{aligned} \tag{2.45}$$

(ii): Jos $a = 0$, niin väite on selvä.
Olkoon $a > 0$ ja funktion f normaaliesitys $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$. Tällöin $af = \sum_{i=1}^k a a_i \chi_{A_i}$, joten

$$\int_E af = \sum_{i=1}^k a a_i m(A_i \cap E) = a \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = a \int_E f.$$

□

Seuraava tulos kertoo, että mikä tahansa ei-negatiivinen mitallinen funktio on raja-arvo yksinkertaisista funktioista. [15]

Lause 2.24. *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallinen. Tällöin on olemassa nouseva jono yksinkertaisia funktioita $f_m \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, s.e. $f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

[15] Tämä on yksi *käytännöllisimmistä tavoista ajatella mitallisia funktioita.* Useat tulokset integrointiteoriassa palautuvat sen avulla yksinkertaisiin ja sitä kautta karakteristisiin funktioihin. (Parhaana esimerkkinä Fubinin lause kurssin lopussa.)

Huomautuksia: Todistus ei ole muuta kuin "vaakapalkki-arvioinnin" formalisaatio yksinkertaisten funktioiden kielellä.

Funktion f mitallisuudella ei ole muuta tarkoitusta kuin varmistaa, *että muodostettavat yksinkertaiset funktiot f_m ovat myös mitallisia*; voimme aina arvioida mitä tahansa funktiota vaakapalkeilla, mutta jotta voisimme puhua palkkien "aloista" tarvitsemme mitallisuutta.

Todistus. Vertaa Lauseen 2.6 todistukseen. Idea tulee suoraan vaakapalkki-integroinnista: Ensimmäinen askel on jakaa pystyakseli $1/2^m$-pituisiin väleihin. Määrittelemme ensin funktion f_m joka on tavallaan alavaakapalkiston yläreuna: $f_m(x) = k2^{-m}$, missä k on se yksikäsitteinen (pisteestä x riippuva) kokonaisluku jolla pätee $f(x) - 2^{-m} \leq k2^{-m} < f(x)$. On selvää, että $f_m \nearrow f$, kun $m \to \infty$.

Jos funktio f on rajoittamaton, voi käydä niin, että f_m saa äärettömän monta arvoa tai arvon ∞ jossakin pisteessä, mikä ei sovi yksinkertaisen funktion määritelmään. Siksi säädämmekin sitä seuraavasti (yleinen kikka mittateoriassa): määritellään funktio $f'_m(x) = \min\{f_m(x), m\}$. Nyt on helppo todeta, että f'_m on yksinkertainen ja $f'_m \nearrow f$, kun $m \to \infty$ pätee edelleen. □

Edellisen tuloksen avulla saadaan hyödyllinen karakterisaatio Lebesgue-integraalille:

Korollari 2.25. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Silloin pätee*

$$\int_E f = \sup\{\int_E \varphi\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}.$$

Todistus on (jälleen kerran) Lauseen 2.6 argumentti, nyt ilmaistuna yksinkertaisilla funktioilla vaakapalkkien sijasta.

Todistus. Löydetään nouseva jono 1-kertaisia funktioita $f_k \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ siten, että $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_k(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Nousevan funktiojonon graafijoukot muodostavat kasvavan joukkojonon $\mathcal{G}(f_k) \subset \mathcal{G}(f_{k+1}) \subset \mathcal{G}(f)$ kaikilla k. Lisäksi $\mathcal{G}(f) = \bigcup_m \mathcal{G}(f_m)$. Täten Lauseen 2.6 ja mitan konvergenssin nojalla

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{m_{n+1}(\mathcal{G}(f_k))}_{\int_E f_k} \leq \sup\{\int_E \varphi\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}. \tag{2.46}$$

Toisaalta koska $f \geq \varphi$, niin integraalin monotonisuuden perusteella $\int_E f \geq \int_E \varphi$, joten $\int_E f \geq \sup\{\int_E \varphi\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}$. □

Huomio. Usein Korollaari 2.25 otetaan Lebesguen integraalin määritelmäksi. Yläintegraalia ei teknisesti ottaen tarvita, koska se yhtyy automaattisesti tähän alaintegraaliin.

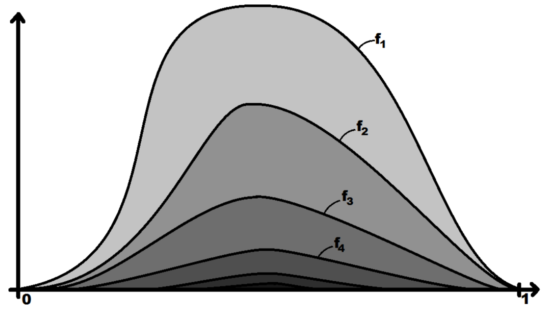
3 Konvergenssilauseet

Lebesgue-integraali pääsee oikeuksiinsa konvergenssilauseissa. Historiallisesti konvergenssikysymykset olivat tärkeimpiä motivaatioita uuden integrointiteorian muodostamiseksi. Klassisella integrointiteorialla nimittäin oli ongelma: Se ei pystynyt todistamaan jotakin mikä "oli totta". Nolon ongelman selkein ilmentymä on laskevan funktiojonon integraalien raja-arvo.

Kuvittele, että meillä on jono Riemann-integroituvia positiivisia funktioita $f_n : [a, b] \to [0, \infty)$ siten, että $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \searrow 0$ (pisteittäin). Silloin vastaavat Riemann integraalit $(R) \int_a^b f_n$ muodostavat vähenevän jonon jolla on jokin raja-arvo. Kohtalokas kysymys kuuluu: Suppenevatko integraalit nollaan?

$$\lim_{n\to\infty} (R) \int_a^b f_n = 0? \tag{3.47}$$

Katso kuvaa ja kuuntele mitä intuitiosi sanoo.



Integraalit vastaavat väritettyjen alueiden aloja, jotka vähenevät ja vähenevät, lopulta selvästi "tyhjenevät" kokonaan. Jokainen piste x-akselin yläpuolella jää lopulta laskevien graafien ylläpuolelle. Miten raja-arvo (3.47) voisi olla olematta nolla?

Kenties voimme todistaa sen vääräksi keksimällä vastaesimerkin? Käy kuitenkin ilmi, että jokainen konkreettinen tapaus, jossa osaamme laskea integraalit $\int_a^b f_n$, toteuttaa väitteen (3.47).

Kaikki siis viittaa siihen, että lause on totta. Ja kuitenkin sen todistus on suhteettoman monimutkainen [Todistus on mahdollinen, lopulta. (Arzela, 1885)] [16]. Loogisesti monimutkaisuus ei tietenkään ole tuomittavaa, mutta esteettisesti tilanne on katastrofi...ja samalla arvokas vihje, sillä kauneusvirheet matematiikassa viittaavat usein siihen, että teoriassa on parannettavaa perustavalla tasolla.

Lebesgue-integraalille tulos ei tuota ongelmia, sillä Lauseen 2.6 ja mitan konvergenssin mukaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to\infty} m_2(\mathcal{G}(f_n)) = m_2(\underbrace{\bigcap_n \mathcal{G}(f_n)}_{\emptyset}) = 0. \tag{3.48}$$

Todistus on siis suorastaan triviaali – niinkuin intuition puolesta pitääkin! Lisäksi se pätee paljon yleisemmille (mitallisille) funktioille, ja lopulta voimme jopa päästää irti monotonisuusvaatimuksesta. Silloin olemme astuneet jo reippaasti intuitiomme ulkopuolelle ja moderni integrointiteoria viimeistään perii kruununsa Riemann-integraalilta.

Ensimmäiseksi kohennamme perustietojamme luku- ja funktiojonoista.

[16] Jos oletat, että funktiot f_n ovat jatkuvia, niin voit kompaktisuusargumentein osoittaa, että suppeneminen on tasaista. Tällöin Riemann-integraalissakin saa vaihtaa rajankäynnin ja integroinnin järjestystä.

3.1 lim sup ja lim inf

Monotoniset lukujonot ovat siitä mukavia, että niillä on aina raja-arvo (joka voi tulkintamme mukaan olla $\pm\infty$). Yleisellä lukujonolla tätä ominaisuutta ei tietenkään ole, mutta sen ominaisuuksia voi silti tutkia eräiden siitä johdettujen monotonisten lukujonojen avulla.

Olkoon $a_1, a_2, \dots$ jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä. Voimme muodostaa "yläarviojonon" $b_k = \sup_{i\geq k} a_i$, ja "ala-arviojonon" $c_k = \inf_{i\geq k} a_i$, jolloin pätee $c_k \leq a_k \leq b_k$ kaikilla $k = 1, 2 \dots$.

Huomaamme, että nämä apujonot ovat monotonisia:

$$
\begin{aligned}
&b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \cdots \quad && \text{ja} \\
&c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \quad && (\sup / \inf \text{ pienemmästä joukosta})
\end{aligned}
$$

Täten niillä on olemassa raja-arvot

$$
\begin{aligned}
\beta &= \limsup_{i\to\infty} a_i \quad \text{tai} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}}\, a_i \qquad \text{"yläraja-arvo" eli "limes superior"} \\
\gamma &= \liminf_{i\to\infty} a_i \quad \text{tai} \quad \underline{\lim_{i\to\infty}}\, a_i \qquad \text{"alaraja-arvo" eli "limes inferior".}
\end{aligned}
$$

Nämä rajat ovat niin hyödyllisiä, että niillä on virallinen määritelmä.

Määritelmä 3.26. Olkoon $a_1, a_2, \dots$ jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä.

$$
\begin{aligned}
\limsup_{i\to\infty} a_i &:= \lim_{k\to\infty}\big(\sup_{i\geq k} a_i\big) = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{i\geq k} a_i\big), \\
\liminf_{i\to\infty} a_i &:= \lim_{k\to\infty}\big(\inf_{i\geq k} a_i\big) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{i\geq k} a_i\big).
\end{aligned}
$$

Esimerkki 3.27. (1) Jos valitsemme jonon $\infty, -\infty, \infty, -\infty, \dots$ niin $b_k = \infty\ \forall k$, $c_k = -\infty\ \forall k$ mistä seuraa, että $\beta = \infty$, $\gamma = -\infty$.

(2) Jos valitsemme jonon $1, 2, 3, 4, \dots$; niin $b_k = \infty\ \forall k$, $c_k = k\ \forall k$ joten $\beta = \infty = \gamma$.

(3) Jos $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ niin $b_k = 1\ \forall k$, $c_k = 0\ \forall k$ joten $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

(4) Jos $0, -1, 0, -2, 0, -3, \dots$ niin $b_k = 0\ \forall k$, $c_k = -\infty\ \forall k$ joten $\beta = 0$, $\gamma = -\infty$.

Kuten olettaisi, seuraavat arviot ovat aina voimassa:

Lause 3.28. *(i)* $\liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i$.

(ii) Jos lukujono on ylhäältä rajoitettu, eli $a_i \leq M\ \forall i \geq i_0$, *niin* $\limsup_{i\to\infty} a_i \leq M$.

(iii) Jos lukujono on alhaalta rajoitettu, eli $a_i \geq m\ \forall i \geq i_0$ *, niin* $\liminf_{i\to\infty} a_i \geq m$.

Todistus. Kaikki kohdat seuraavat siitä, että vastaavat relaatiot pätevät "jokaisella i".

(i) Koska $\inf_{k\geq k} a_k \leq \sup_{k\geq i} a_k$ kaikilla $i \geq i_0$, niin sama pätee rajalla: $\lim_{i\to\infty} \inf_{k\geq i} a_k \leq \lim_{i\to\infty} \sup_{k\geq i} a_k$.

(ii) Koska $\sup_{k\geq i} a_k \leq M$ kaikilla $i \geq i_0$, niin $\lim_{i\to\infty} \sup_{k\geq i} a_k \leq M$.

(iii) Koska $\inf_{k\geq i} a_k \geq m$ kaikilla $i \geq i_0$, niin $\lim_{i\to\infty} \inf_{k\geq i} a_k \geq m$.

□

Sen lisäksi, että lukujonon lim sup ja lim inf antavat ylä- ja ala-arvioita, niiden avulla voi myös muotoilla erittäin käyttökelpoisen kriteerin raja-arvon olemassaololle.

Lause 3.29 (Karakterisaatio raja-arvon olemassaololle)**.** *Olkoon* (a_i) *jono* $\dot{\mathbb{R}}$*:ssä. Tällöin jonolla on raja-arvo jos ja vain jos jonon* $\liminf$ *ja* $\limsup$ *ovat samat:*

$$\exists \lim_{i\to\infty} a_i \ (\in \dot{\mathbb{R}}) \iff \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\in \dot{\mathbb{R}}).$$

Tässä tapauksessa

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\pm\infty \quad \textit{sallitaan}).$$

Todistus:

$\boxed{\Leftarrow}$ Jokaisella $i = 0, 1, \ldots$ pätee $c_i \leq a_i \leq b_i$. Määritelmien mukaan jono $c_i \nearrow \liminf_{i\to\infty} a_i$ kun $i \to \infty$ ja $b_i \searrow \limsup_{i\to\infty} a_i$ kun $i \to \infty$. Jos siis "$\liminf = \limsup$", jonolla (a_k) ei ole muuta vaihtoehtoa kuin supeta samaan arvoon $\alpha = \gamma = \beta$. Yksityiskohtainen todistus jätetään lukijalle. (Kannattaa jakaa virallinen todistus tapauksiin $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\alpha = \pm\infty$)

$\boxed{\Rightarrow}$ Oletetaan, että jonolla on raja-arvo $\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$. Jaetaan todistus "äärelliseen ja äärettömään" tapaukseen.

(a1) $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$: Raja-arvon määritelmän mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\alpha - \varepsilon \leq a_k \leq \alpha + \varepsilon$, kun $k \geq N$. Täten edellisen Lauseen 3.28 nojalla pätee $\alpha - \varepsilon \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha + \varepsilon$. Koska ε on mielivaltainen, niin täytyy olla $\gamma = \alpha = \beta$.

(a2) $\underline{\alpha = \infty}$: Määritelmän mukaan kaikilla $M > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että $M \leq a_k$, kun $k \geq N$. Siten myös $M \leq \gamma \leq \beta$, ja koska M on mielivaltainen, niin $\infty \leq \gamma \leq \beta$.

(a3) Tapaus $\alpha = -\infty$ todistetaan samoin.

$\square$

Tulkinta: $x < \limsup_i a_i$ jos ja vain jos $x < a_i$ *äärettömän monella indeksillä* i.

$x < \liminf_i a_i$ jos ja vain jos $x < a_i$ *jostakin indeksistä* i_0 *lähtien*, eli kun $i \geq i_0$.

Perustelu: Oletetaan, että $x < \limsup_i a_i = \inf_{i\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\geq i} a_j\big)$. Infimumin määritelmän mukaan tämä pätee jos ja vain jos *kaikilla* $i \in \mathbb{N}$ pätee $x < \sup_{j\geq i} a_j$. Tämä taas pätee jos ja vain jos kaikilla $i \in \mathbb{N}$ löytyy jokin $j \geq i$ siten että $x < a_j$. Viimeinen ominaisuus puolestaan pätee selvästi jos ja vain jos $x < a_j$ äärettömän monella j (tee vaikka vastaoletus).

Samoin $x < \liminf_i a_i \sup_{i\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\geq i} a_j\big)$ jos ja vain jos löytyy i_0 siten että $x < \inf_{j\geq i_0} a_j$. Tämä taas pätee jos ja vain jos $x < a_j$ kaikilla $j \geq i_0$, mikä oli osoitettava.

3.2 Joukkojonon $\limsup$ ja $\liminf$

Myös joukkojonoille on hyödyllistä määritellä $\limsup$ ja $\liminf$ käsitteet.

Määritelmä 3.30. Olkoon $A_1, A_2, A_3, \ldots$ jono joukkoja. Tällöin

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \tag{3.49}$$

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k. \tag{3.50}$$

Aina pätee sisältyvyys $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$ (HT). Jos pätee yhtäsuuruus $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, niin silloin sanomme että joukkojonolla on *rajajoukko* $\lim_{n\to\infty} A_n := \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$.

Vastaavasti joukkojonolla on rajajoukko *melkein kaikkialla*, jos $m(\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n) = 0$.

Tulkinta: $x \in \limsup_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_n$ *äärettömän monella indeksillä* n.

$x \in \liminf_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_n$ *jostakin indeksistä* n_0 *lähtien*, eli kun $n \geq n_0$.

Perustelu: Olkoon $x \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$. Leikkauksen määritelmän mukaan tämä pätee jos ja vain jos *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$ pätee $x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$. Tämä taas pätee jos ja vain jos kaikilla $n \in \mathbb{N}$ löytyy jokin $k \geq n$ siten että $x \in A_k$. Viimeinen ominaisuus puolestaan pätee selvästi jos ja vain jos $x \in A_k$ äärettömän monella k (tee vaikka vastaoletus).

Samoin $x \in \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$ jos ja vain jos löytyy n_0 siten että $x \in \bigcap_{k\geq n} A_k$. Tämä taas pätee jos ja vain jos $x \in A_k$ kaikilla $k \geq n_0$, mikä oli osoitettava.

3.3 Rajafunktion mitallisuus

Riemann-integroituvilla funktioilla on luokkana eräs sekä teoreettinen että käytännöllinen puute: se ei ole "suljettu pisteittäisen suppenemisen suhteen". Siis, jos f_j on jono Riemann-integroituvia funktioita siten, että pisteittäinen raja-arvo $\lim_{j\to\infty} f_j(x) =: f(x)$ on olemassa kaikilla x, niin rajafunktion f ei tarvitse olla enää Riemann-integroituva[17]. Tämä kenties harmittomalta vaikuttava puute estää monia teoreettisia konstruktioita.

Mitallisilla (eli Lebesgue-integroitavilla) funktioilla vastaavaa ongelmaa ei esiinny, ja tämän todistuskin seuraa varsin lyhyesti.

Lause 3.31. *Olkoot* $f_j \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, *mitallisia. Silloin funktiot*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

ovat mitallisia. Jos on olemassa pisteittäinen raja-funktio $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, *niin* f *on mitallinen.*

Huomautus 3.32. Yo. funktiot on siis määritelty *pisteittäin.* Esimerkiksi funktion $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ arvo pisteessä $x \in A$ on $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \in \dot{\mathbb{R}}$.

Todistus. Itse asiassa riittää todistaa vain supremumin $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ mitallisuus, sillä sen jälkeen muiden mitallisuudet seuraavat yksitellen huomioista

$$\begin{aligned}
&\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j) \quad \text{on mitallinen,} \\
&\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen} \\
&\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen} \\
&\text{Jos } \exists f = \lim_{j\to\infty} f_j, \text{ niin } \lim_{j\to\infty} f_j \overset{\text{L. 3.29}}{=} \limsup_{j\to\infty} f_j \quad \text{on mitallinen.}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Käytämme Karakterisaatiota 2.4 ja tutkimme esimerkiksi puolivälien $[-\infty, a]$ alkukuvia

$$(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)^{-1}[-\infty, a] = \{x \in A : \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \leq a\}.$$

Mutta, $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \leq a$, jos ja vain jos $f_j(x) \leq a$ *kaikilla* j, mikä tarkoittaa, että x kuuluu alkukuvaan $f_j^{-1}[-\infty, a]$ kaikilla j; eli $x \in \bigcap_j f_j^{-1}[-\infty, a]$. Täten

$$(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)^{-1}[-\infty, a] = \bigcap_j f_j^{-1}[-\infty, a],$$

[17]Esimerkiksi, numeroi rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, aseta $f_j := \chi_{\{q_n : n=1,\ldots,j\}}$. Tällöin $f_j \to \chi_{\mathbb{Q}}$ pisteittäin.

on mitallinen, koska alkukuvat $f_j^{-1}[-\infty, a]$ ovat mitallisia kaikilla j. □

Analyysi on täynnä konstruktioita ja prosesseja jotka tuottavat funktioita/joukkoja "raja-arvoina". Usein kuitenkin joudumme hyväksymään, että on olemassa muutamia "poikkeuksellisia" pisteitä, joissa raja-arvo ei ole määritelty tai joissa emme tunne sitä. Otamme käyttöön uuden joustavan termin: **Melkein kaikkialla** (lyhyemmin m.k.) = lukuunottamatta 0-mittaista joukkoa. (Samoin "melkein jokainen" (lyhyemmin m.j.)).

Esim.

(a) m.j. reaaliluku on irrationaalinen, sillä $m(\mathbb{Q}) = 0$.

(b) $e^{-jx^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$, sillä $m(\{0\}) = 0$.

On erityisen kätevää, että funktion mitallisuus, ja sitä myötä integroitavuus, ei riipu sen arvoista aivan joka ikisessä pisteessä. Näin ollen voimme puhua myös sellaisten funktioiden mitallisuudesta, jotka ovat määriteltyjä vain melkein kaikkialla.

Lause 3.33. *(0-mittaiset joukot eivät vaikuta mitallisuuteen) Olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Oletetaan, että f on mitallinen ja $g = f$ m.k. Silloin myös g on mitallinen.*

Todistus. Kirjoitetaan ensin $g = (g - f) + f$, jossa erotus $g - f = 0$ melkein kaikkialla. Koska funktio f on mitallinen ja mitallisten summa on mitallinen, meidän riittää osoittaa, että funktio joka on nolla m.k. on mitallinen.

Oletetaan siis, että $h = 0$ melkein kaikkialla. Jos $a > 0$, niin alkukuva $h^{-1}[a, \infty] = \{x \in A : h(x) \geq a\}$ on nollamittainen ja siten mitallinen. Jos taas $a \leq 0$, niin $h^{-1}[a, \infty]$ on mitallinen, koska sen komplementti $h^{-1}[-\infty, a)$ on nollamittainen. □

Raja-funktionkin tarvitsee olla olemassa vain melkein kaikkialla ollakseen mitallinen [Tämä tulkitaan tarvittaessa niin, että pisteissä joissa raja-arvo ei ole olemassa, arvot $f(x)$ määrätään mielivaltaisesti, esimerkiksi nollaksi; valinta ei vaikuta mitallisuuteen].

Lause 3.34. *Olkoot $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia ja $f_j \to f$ melkein kaikkialla. Silloin (m.k. määritelty) rajafunktio f on mitallinen.*

Todistus. Ideana on käyttää tietoa, että lim sup on olemassa myös niissä pisteissä missä raja-arvo ei ole. Funktio $\limsup_{j\to\infty} f_j$ on aina mitallinen (L. 3.31), ja niissä pisteissä missä raja-arvo on olemassa, eli m.k., pätee $\limsup_{j\to\infty} f_j = f(x)$. Näin ollen edellisen lauseen mukaan myös f on mitallinen. □

Esimerkki 3.35. Oletetaan, että mitallisella funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivaatta $f'(x)$ melkein kaikkialla.

Väite: melkein kaikkialla määritelty derivaattafunktio f' on mitallinen.

Todistus. Merkitään

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n},$$

jolloin funktio g_n on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x)$ pisteissä joissa f on derivoituva, eli melkein kaikkialla. Täten Lauseen 3.34 mukaan f' on mitallinen. □

Lisätieto I *Littlewoodin kolme periaatetta* (Kts. esim. Royden):

(I) Jokainen mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $m(A) < \infty$, on "melkein" äärellinen yhdiste $F = \bigcup_{j=1}^m I_j$, missä $I_1, \ldots, I_m$ ovat n-välejä: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; F = \bigcup_{j=1}^m I_j \subset A$ s.e. $m(A \triangle F) < \varepsilon$, missä $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ ("symmetrinen erotus").

(II) Jokainen mitallinen kuvaus on "melkein jatkuva": Lusinin lause (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, $f \colon A \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $\varepsilon > 0$, niin $\exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f|C$ on jatkuva.

(III) Jokainen suppeneva jono mitallisia funktioita $f_j \colon A \to \mathbb{R}$ on "melkein tasaisesti suppeneva": Egorovin lause (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, $f_j \colon A \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia ja $f_j \to f \colon A \to \mathbb{R}$ m.k. Silloin $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f_j|C \to f|C$ tasaisesti (t.s. $\sup_{x \in C} |f_j(x) - f(x)| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$).

Lisätieto II Olkoon (Ω, Γ, μ) tn-avaruus. Kurssilla TN I (tai TN-teoria) sanotaan, että funktio $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Voidaan osoittaa, että Lause 2.4 pätee myös näille, ja

$$X \colon \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{satunnaismuuttuja} \iff X \;\Gamma\text{-mitallinen funktio } \Omega \to \mathbb{R}.$$

3.4 Yhteys Riemann-integraaliin

Olemmeko onnistuneet yleistämään integraalin käsitettä? Jotta näin olisi, jokaisen Riemann-integroituva funktion pitäisi olla myös "Lebesgue-integroituva" eli mitallinen.

Lause 3.36. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu (koska Riemann-integraali on määritelty vain rajoittujen joukkojen yli) ja $f \colon E \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Jos f on Riemann-integroituva yli E:n, niin silloin f on mitallinen (eli "Lebesgue-integroituva") ja pätee*

$$\textit{(Riemann-integraali)} \quad (\mathrm{R}) \int_E f = \int_E f \quad \textit{(oik.puol. Lebesgue-integraali).}$$

Näin on esimerkiksi aina, kun E on suljettu n-väli ja f jatkuva.

Heuristinen perustelu: Yksi ainoa huomio riittää: Riemann-integraalia voi, määritelmän mukaan, approksimoida ylhäältä ja alhaalta *askel-funktioiden* integraaleilla. Askelfunktioilla tarkoitamme yksinkertaisia funktioita $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$ joissa joukot A_i ovat *n-välejä.* Esimerkiksi jokainen Riemann-alasumma vastaa tällaisen (erittäin) yksinkertaisen funktion integraalia Lauseen 2.22 mielessä. Todistuksen "moraali" on, että jos kerran funktiota voi "approksimoida askelfunktioilla", mikä tarkoittaa Riemann-integroituvuutta, niin kyllä sitä voi approksimoida yleisemmilläkin yksinkertaisilla funktioilla, mikä tarkoittaa Lebesgue integroituvuutta.

Summa summarum: Riemann-integraali on Lebesguen erikoistapaus, koska Riemann-integraali käyttää rajoitetumpaa kokoelmaa yksinkertaisia funktioita.

Vaihtoehtoinen näkökulma: Riemann-integraalissa tavoitteena on "approksimoida graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen alaa/tilavuutta/mittaa *äärellisillä monikulmioilla*". Lebesgue-integraalissa on täsmälleen sama tavoite, mutta sallitaan *numeroituvat* monikulmiot (tai n-välien yhdisteet).

Lauseen 3.36 todistus Valitaan suljettu n-väli $I \supset E$. Koska määritelmän mukaan

$$(\mathrm{R}) \int_E f = (\mathrm{R}) \int_I f \chi_E \quad \text{ja} \quad \int_E f = \int f \chi_E = \int_I f \chi_E,$$

voidaan (korvaamalla f funktiolla $f\chi_E$) olettaa, että $E = I$.

Koska f on Riemann-integroituva, niin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa I:n jako $D^m = \{I_1, \dots, I_k\}$ ("puoliavoimiin") erillisiin osaväleihin siten, että vastaavat "ylä- ja ala-summat ovat $1/m$ päässä toisistaan", eli

$$\sum_{i=1}^{k} G_i \ell(I_i) - \sum_{i=1}^{k} g_i \ell(I_i) \le \frac{1}{m}, \tag{3.52}$$

missä $G_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ ja $g_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$.

Nyt oleellinen huomio: Ylä- ja ala-summat vastaavat yksinkertaisten funktioiden integraaleja:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} G_i \ell(I_i) &= \int \underbrace{\sum_{i=1}^{k} G_i \chi_{I_i}}_{\phi_m} = \int \phi_m \\ \sum_{i=1}^{k} g_i \ell(I_i) &= \int \underbrace{\sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{I_i}}_{\psi_m} = \int \psi_m. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Selvästi $\psi_m \le f \le \phi_m$ kaikilla m. Määritellään funktiot g ja G seuraavasti: $g := \sup_m \psi_m \le f \le \inf_m \phi_m =: G$. Koska funktion mitallisuus säilyy raja-arvoissa (L. 3.31), ovat g ja G mitallisia. Lisäksi on helppo nähdä, että

$$\int (G - g) \le \int (\phi_m - \psi_m) \le \frac{1}{m} \quad (\forall m \in \mathbb{N}). \tag{3.54}$$

Täten $\int (G-g) = 0$ joten Lauseen 2.9 perusteella $g = f = G$ melkein kaikkialla, eli $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Lauseen 3.33 mukaan myös f on mitallinen. $\square$

Olemme osoittaneet, että Lebesguen integraali on *vähintään* yhtä yleinen kuin Riemann-integraali. Itseasiassa, Lebesguen integraali on <u>aidosti</u> yleisempi kuin Riemann-integraali:

Esimerkki 3.37. Olkoon $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ = rationaaliluvut. f on yksinkertainen, sillä alkukuvat $f^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ ja $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ovat mitallisia. Sen Lebesgue integraali on

$$\int_E f = m(E \cap \mathbb{Q}) = 0,$$

missä $E \subset \mathbb{R}$ on mitallinen joukko.

Toisaalta f ei ole Riemann-integroituva minkään välin $[a, b]$, $a < b$, yli: Olkoon $D = \{I_1, \dots, I_k\}$ välin $[a, b]$ jako osaväleihin. Jokainen I_i sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja jonka vuoksi alasumma on aina nolla ja yläsumma välin pituus:

$$m_D = \sum_i 0 \cdot \ell(I_i) = 0 \text{ ja } M_D = \sum_i 1 \cdot \ell(I_i) = b - a.$$

Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että Riemann-integraali käy hyödyttömäksi. Käytännön laskut hoidetaan useimmiten Analyysin Peruslauseella, joka "virallisesti" on todistettu Riemann-integraalille. Itseasiassa kyseisen peruslauseen luonne ja todistus ovat paremmin "yhteensopivia" Riemann-integraalin määritelmän kanssa. Myös monissa muissa dynaamisissa tilanteissa kuten differentiaaliyhtälöissä Riemann integraalin määritelmä saattaa olla käyttökelpoisempi.

3.5 Monotonisen Konvergenssin Lause (MKL)

On aika esitellä lause joka toimi historiallisesti suurena motivaationa modernille integrointiteorialle. Monotonisen konvergenssin lause ja sen serkut Fatoun Lemma ja Dominoidun konvergenssin lause tekevät Lebesgue-integraalista ylistetyn yhteensopivan raja-arvoprosessien kanssa. Monille analyysin aloille se on elinehto.

Korollari 3.38 (Monotonisen konvergenssin lause (MKL))**.** *Olkoon $f_j \geq 0$ nouseva jono mitallisia funktioita. Tällöin rajafunktio $f := \lim_{j\to\infty} f_j$ on mitallinen ja pätee*

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j = \int \lim_{j\to\infty} f_j \quad \textit{(voi olla } +\infty\textit{).} \tag{3.55}$$

Huomioita. Funktiojono on monotoninen, joten pisteittäin määritelty raja-arvo-funktio $f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ on olemassa.

Todistuksen idea on äärimmäisen yksinkertainen: Lauseen 2.6 mukaan integraali on graafin alle jäävän alueen mitta. Tästä näkökulmasta *MKL on vain Lebesguen m_{n+1}-mitan konvergenssin erikoistapaus.*

Todistus. Käännetään MKL:n väite "graafijoukkojen kielelle", jolloin meidän pitää osoittaa että pätee

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)), \tag{3.56}$$

missä $f := \lim_j f_j$.

Koska $f_j \leq f_{j+1}$, niin $\mathcal{G}(f_j) \subset \mathcal{G}(f_{j+1})$, joten "graafijoukot" $\mathcal{G}(f_j)$ muodostavat kasvavan joukkojonon. Täten mitan konvergenssin (L. 1.45) nojalla pätee

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\bigcup_j \mathcal{G}(f_j)). \tag{3.57}$$

Mutta nyt joukko $\bigcup_j \mathcal{G}(f_j)$ on täsmälleen joukko $\mathcal{G}(f)$[18]. Tämä todistaa yhtälön (3.56). □

"Vasta"esimerkki. Aina ei saa vaihtaa operaatioiden $\int$ ja lim järjestystä: jos esimerkiki $f_j = \chi_{(j,\infty]}$, niin silloin $\int f_j = \infty$ kaikilla j, mutta toisaalta $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$ kaikilla x, joten

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j = \infty > 0 = \int \lim_{j\to\infty} f_j. \tag{3.58}$$

Huomaa, että jono (f_j) ei ole nouseva, joten MKL:än oletukset eivät täyty.

Esimerkki 3.39. (Loppukoe menneiltä vuosilta) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+} \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

Ratk. Aikaisemmilta kursseilta tiedetään, että riittää tutkia raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\, dt$$

[18] Kuten kerran aikaisemmin: jos $y < f(x) = \lim_j f_j(x)$, niin $y < f_j(x)$ jollakin j.

kaikilla jonoilla (x_n), s.e. $x_n \geq x_{n+1} > 0$ ja $x_n \searrow 0$. Merkitään

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}, \quad t \in [0,\infty) \text{ ja } n = 1,2,\ldots$$

Silloin, jos $x_n \geq x_{n+1} > 0$ ja $t \in [0,\infty)$, niin $e^{-x_n t} \leq e^{-x_{n+1} t}$, joten $0 \leq f_n(t) = \dfrac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \leq \dfrac{e^{-x_{n+1} t}}{1+t^2} = f_{n+1}(t)$, eli (f_n) on kasvava jono. Näin ollen MKL:n oletukset täyttyvät, ja voimme siirtää raja-arvon integraalin sisälle:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\,dt$$

Lasketaan pisteittäinen rajafunktio:

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall\, t \in [0,\infty),$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\,dt &= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &\overset{3.36}{=} \lim_{j\to\infty} \Big/_0^j \arctan t = \lim_{j\to\infty} \big(\arctan j - \arctan 0\big) = \pi/2.\end{aligned}$$

$(*)$:n perustelu: MKL sovellettuna kasvavaan jonoon (g_j),

$$g_j(t) = \frac{\chi_{[0,j]}(t)}{1+t^2}.$$

(Teemme näin koska Lauseessa 3.36 oletettiin, että E on rajoitettu. Ei kovin tärkeä pointti.)

Seuraava perusominaisuus lienee tuttu Riemann-integroinnista. Sen todistustekniikka on hyvin toimiva integrointiteoriassa: Palautetaan ongelma yksinkertaisiin funktioihin.

Lause 3.40. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_1, \ldots, f_k \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \geq 0$. Silloin*

$$\int_E \sum_{j=1}^k f_k = \sum_{j=1}^k \int_E f_k.$$

Todistus. Voi olettaa: $E = \mathbb{R}^n$ ja $k = 2$ (yleinen k induktiolla). Approksimointilauseen 2.24 mukaan löytyy kasvavat jonot (φ_j), (ψ_j) 1-kertaisia funktioita siten, että

$$\varphi_j \nearrow f_1 \quad \text{ja} \quad \psi_j \nearrow f_2\,, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Tästä seuraa, että $\varphi_j + \psi_j \nearrow f_1 + f_2$.

Yksinkertaisille funktioille pätee integraalin lineerisuus (L. 2.23), joten

$$\int (\varphi_j + \psi_j) = \int \varphi_j + \int \psi_j \tag{3.59}$$

Monotonisen konvergenssin (tai Lauseen 2.6 todistuksen) ansiosta $\lim_{j\to\infty} \int \varphi_j = f_1$, $\lim_{j\to\infty} \int \psi_j = f_2$ ja myös $\lim_{j\to\infty} \int (\varphi_j + \psi_j) = \int (f_1 + f_2)$. Siispä, ottamalla raja-arvot yhtälön (3.59) molemmista puolista, todistus on valmis. $\square$

Kuten tyypillistä, Lebesgue-integroinnissa pätee vastaava tulos myös numeroituvalle summalle:

Lause 3.41 (Beppo Levin lause)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \geq 0$. Tällöin*

$$\int_E \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_E f_j .$$

Toisin sanoen, positiivitermisen sarjan saa integroida termeittäin. Se seuraa sarjan määritelmästä ja monotonisesta konvergenssista.

Todistus. Sarjan määritelmän mukaan $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} f_j$. Osasummat $\sum_{j=1}^{k} f_j$ muodostavat nousevan funktiojonon joten MKL:N mukaan

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \int_E \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} f_j \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{j=1}^{k} f_j \overset{3.40}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_E f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j .$$

□

Bebbo-levin lauseen avulla teemme seuraavaksi teoreettisen huomion: Integraali joukkofunktiona $E \mapsto \int_E f$ toteuttaa mitan aksioomat! Tällä yhteydellä on funktionaalianalyysissä ja todennäköisyysteoriassa hyvin tärkeä rooli.

Lause 3.42 (Integraali mittana)**.** *Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$. Silloin kuvaus*

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, +\infty], \quad E \mapsto \int_E f$$

on <u>mitta</u>. Toisin sanoen, se toteuttaa mitan aksioomat (Määritelmä 1.40):

(i)

$$\int_\emptyset f = 0 ,$$

(ii) ja jos $E_j \subset \mathbb{R}^n$ ovat mitallisia ja erillisiä, niin

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f .$$

Tiedosta, että integraali määrittelee mitan, seuraa perustulokset

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia $\Rightarrow$

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f ,$$

ja

(iv) $\mathbb{R}^n \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ mitallisia ja $\int_{E_1} f < \infty \;\Rightarrow$

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f ,$$

Todistus. Kohta (i) seuraa integraalin perusominaisuuksista (Lause 2.7 (4)). Kohta (ii) jätetään harjoitustehtäväksi (Voit esimerkiksi tulkita integraalin "graafi-mittana" jolloin väite seuraa mitan täysadditiivisuudesta.). Kohdat (iii) ja (iv) seuraavat heti yleisen mitan konvergenssilauseista 1.45 ja 1.46. □

Seuraavat pari peruspäätelmää osoittautuvat hyödyllisiksi moneen otteeseen. Ensimmäinen kohta korostaa, että integroinnin kannalta "funktioiden arvoilla on merkitystä vain melkein kaikkialla". Tämä tarjoaa aivan uuden, voimakkaan, näkökulman itse funktioihin, missä kiinnitetään huomiota "keskimääräiseen käyttäytymiseen". Moniin käyttötarkoituksiin funktioita ei ole pakko edes määritellä joka pisteessä. Tästä lisää kurssilla Reaalianalyysi I. Toinen kohta korostaa periaatetta, että integraaleista voi vetää integroitavia funktioita koskevia johtopäätöksiä vain melkein kaikkialla.

Lause 3.43. *Olkoot $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $f \geq 0$, $g \geq 0$. Jos $f = g$ m.k. E:ssä, niin*

$$\int_E f = \int_E g\,.$$

Erityisesti: $f \geq 0$ mitallinen ja määritelty m.k. E:ssä $\Rightarrow$ $\int_E f$ hyvin määritelty.

Todistus. : Merkitään $A = \{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$. Oletuksesta seuraa, että $m(A) = 0$.

$$\int_E f \overset{3.42}{=} \int_{\underbrace{E \setminus A}_{\text{Tässä joukossa} f=g}} f + \underbrace{\int_A f}_{=0} = \int_{E\setminus A} g + \int_A g = \int_E g.$$

□

3.6 Fatoun Lemma

MKL:n heikkous on ennen kaikkea sen rajoittuneisuus monotonisiin funktiojonoihin. Monotonisten funktiojonojen avulla voi kuitenkin arvioida yleisiä jonoja (vertaa lukujonon lim inf ja lim sup). Tähän periaatteeseen perustuu seuraava tärkeä teoreettinen apuväline:

Lause 3.44. (**Fatou**). *Olkoon funktiot $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $f_j \geq 0$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \qquad (\textit{voi olla } +\infty). \tag{3.60}$$

"Integraali-Fatoun" ydin sen mittateoreettinen vastine:

Lemma 3.45. (**Fatou joukoille**) *Olkoon (A_j) jono mitallisia joukkoja. Tällöin pätee*

$$m(\liminf_{j\to\infty} A_j) \leq \liminf_{j\to\infty} m(A_j). \tag{3.61}$$

Todistus. Käytämme vain lim inf:n määritelmää, mitan konvergenssia (L. 1.45) ja monotonisuutta:

$$\begin{aligned} m\Big(\bigcup_{j\geq 1}\bigcap_{k\geq j} A_k\Big) &= \lim_{j\to\infty} m\Big(\bigcap_{k\geq j} A_k\Big) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \inf_{k\geq j} m(A_k), \end{aligned} \tag{3.62}$$

missä viimeinen arvio nojaa yksinkertaiseen huomioon $m\big(\bigcap_{k\geq j} A_k\big) \leq m(A_\ell)$ kaikilla $\ell \geq j$. □

Lauseen 3.44 todistus. Lauseen 2.6 mukaan meidän on osoitettava (vrt. MKL:n todistus), että

$$m_{n+1}(\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j)) \leq \liminf_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)). \tag{3.63}$$

On helppoa tarkistaa sisältyvyys $\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j) \subset \liminf_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)$[19]. Täten voimme arvioida vasenta yhtälön puolta ylöspäin

$$m_{n+1}(\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j)) \leq m_{n+1}(\liminf_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)). \tag{3.64}$$

Tämän jälkeen epäyhtälö (3.63) on erikoistapaus edellisestä Lemmasta valinnoilla $A_n := \mathcal{G}(f_n)$. □

Huomio. Kuten MKL, Integraali-Fatou on oikeastaan erikoistapaus mitan konvergenssista.

Kuten saattaisi arvata, käänteinen epäyhtälö pätee limes superiorille. Tarvitsemme seuraavaa tulosta Dominoidun konvergenssin todistuksessa.

Lemma 3.46. (”$\limsup$**-Fatou”**) Olkoon (A_j) jono mitallisia joukkoja jotka sisältyvät äärelliseen (mitalliseen) joukkoon X, eli $A_j \subset X$, missä $m(X) < \infty$. Tällöin pätee

$$m(\limsup_{j\to\infty} A_j) \geq \limsup_{j\to\infty} m(A_j). \tag{3.65}$$

Todistus. (HT) Vihje: sovella Fatoun Lemmaa komplementteihin $X \setminus A_j$.

Kaksi periaatetta aitoon epäyhtälöön Tietyssä mielessä on olemassa vain kaksi perusmekanismia, jotka saavat aikaan *aidon* epäyhtälön Fatoun lemmassa. Jos nämä tilanteet pystyy sulkemaan pois, pätee Fatoussa yhtäsuuruus, ja voi raja-arvon siirtää integraalin sisälle. Tämä on myöhemmin läheisessä yhteydessä Dominoidun konvergenssin lauseen oletuksiin.

Ensimmäinen mekanismi on, väljästi ilmaistuna, **”massan karkaus äärettömyyteen”**. Tämä voi tapahtua puolestaan oleellisesti vain kolmella eri tavalla.

(1) Olkoon $f_j = \chi_{[j,j+1]}$. Näin valituille funktioille pätee

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = m([j, j+1]) = 1 \to 1 \;\text{ kun } j \to \infty$$

Fatou pätee muodossa $0 < 1$. Tässä tilanteessa ”massa karkaa kaukaisuuteen”.

(2) Olkoon $f_j = j\chi_{(0,1/j]}$. Näin valituille funktioille pätee

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \;\forall\, j.$$

Fatou pätee muodossa $0 < 1$. Tässä tilanteessa ”massa karkaa korkealle”.

[19] Jos $y < \liminf_j f_j(x)$, niin $y < f_j(x)$ jostakin j_0 lähtien, eli $y \in \bigcap_{i\geq j_0} \mathcal{G}(f_i)$.

(3) Olkoon $f_j := \frac{1}{j}\chi_{(0,j]}$. Kuten edellä, Fatou pätee nyt muodossa $0 < 1$. Tässä massa karkaa jälleen horisontaaliin äärettömyyteen mutta hieman eri tavalla kuin ensimmäisessä esimerkissä.

Toinen perusmekanismi on **"funktiojonon loputon heilahtelu"** (näin käy aina jos raja-arvo $\lim_j f_j$ ei ole olemassa): Olkoon E mitallinen joukko siten, että $m(E) > 0$ ja $m(E^c) > 0$. Määritellään nyt funktiot $f_j = \chi_E$, kun j on parillinen, ja $f_j = \chi_{E^c}$, kun j on pariton. On helppoa tarkistaa, että näillä oletuksilla Fatoussa esiintyy aito epäyhtälö "$0 < \min\{m(E), m(E^c)\}$".

Viimeiseksi korostamme, että funktioiden positiivisuusoletusta ei voi jättää kokonaan pois (myöhemmin tosin lievennämme sitä): Olkoon $f_j = -j\chi_{(0,1/j]}$ (eli esimerkin 2. funktiot miinusmerkeillä). Nyt Fatou ei päde koska

$$\int_{\mathbb{R}} f_j = -1 \ \forall\ j.$$

Yleisemmin, mitä tahansa ei-negatiivista funktiojonoa (f_j), joka tuottaa aidon epäyhtälön Fatoun lemmassa, voidaan käyttää rakentamaan ei-positiivinen funktiojono, $(-f_j)$, jolla "Fatoun epäyhtälö ei päde".

Lisätieto: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, f Γ-mitallinen funktio $X \to [0, \infty]$. Määritellään f:n <u>integraali</u>

$$\int_X f = \sup\{I(\varphi) \colon \varphi \colon X \to \mathbb{R} \text{ 1-kert.}, \ \varphi \le f\},$$
$$\int_E f = \int_X f\chi_E, \quad \text{kun } E \in \Gamma.$$

Vastaavat tulokset (paitsi Lause 3.36 (Riemann-int.)) ovat voimassa. Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ X:llä ja $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ σ-algebralla $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Usein oletetaan, että X:llä on ns. <u>σ-äärellinen mitta</u>, ts.

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \text{missä } \Omega_j \in \Gamma, \ \mu(\Omega_j) < \infty.$$

3.7 Lebesguen integraali: vaihtuvamerkkiset funktiot

Riemann-integraalin määritelmä pätee saman tien funktioille, jotka saavat sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja. Lebesgue-integraali sitä vastoin määriteltiin ensin vain positiivisille funktioille. On aika korjata tilanne.

Meillä ei ole paljon vaihtoehtoja miten edetä. Ensinnäkin, kuvittele että mitallinen funktio f on negatiivinen. Silloin on täysin luontevaa vaatia/määritellä, että sen integraali on $-\int(-f)$. (Koska $-f \ge 0$, integraali on määritelty.) "Osaamme" siis integroita sekä positiivisia, että negatiivisia funktioita. Toisaalta mikä tahansa funktio f voidaan helposti esittää summana näistä kahdesta funktiotyypistä: Olkoon $f \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $E \subset \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad (= \frac{1}{2}\big(|f| + f\big) \text{ mitallinen})$$
$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \qquad (= \frac{1}{2}\big(|f| - f\big) \text{ mitallinen}).$$

Tällöin

$$f^+(x) \ge 0, \qquad f^-(x) \ge 0$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

(Huom. yllä ei synny tapausta $\infty - \infty$, sillä aina joko $f^+(x) = 0$ tai $f^-(x) = 0$.)

Nyt siis positiivisten funktioiden f^+ ja f^- integraalit

$$\int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E f^-,$$

ovat määriteltyjä. Näin ollen on mitä luontevinta yrittää *määritellä* funktion f integraali kyseisten integraalien erotuksena. Tässä on vain yksi ongelma: Tuloksena voi olla huonosti määriteltyjä äärettömyyksiä: esimerkiksi, jos $f = \chi_{(-\infty,0)} - \chi_{[0,\infty)}$, niin emme voi määritellä integraalia $\int f$ periaatteella

$$\int \chi_{(-\infty,0)} - \int \chi_{[0,\infty)} = \infty - \infty = ???.$$

Tällaisten tapausten välttämiseksi päätämmekin yksinkertaisesti keskittyä äärellisiin integraaleihin:

Määritelmä 3.47. Funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva E:ssä (tai lyh. integroituva), jos f mitallinen ja jos $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Lisätieto: Joskus integraali määritellään silloinkin kun vain toinen integraaleista $\int_E f^+$, $\int_E f^-$ on äärellinen (jolloin edelleen vältetään tilanne $\infty - \infty$). Miksi me siis rajoitumme pienempään kokoelmaan? Vastaus: Haluamme, että integroituvien funktioiden summa on integroituva (Lause 3.53 (i)), jolloin integroituvien funktioiden joukko muodostaa normiavaruuden (normina $\int_E |f|$). Tästä päästään funktioavaruuksien teoriaan mistä lisää muilla kursseilla.

Integroituvuudella on seuraava vaihtoehtoinen karakterisaatio. Lisäksi integraalia voi arvioida siirtämällä itseisarvot integraalin sisälle.

Lause 3.48. *Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Funktio f on integroituva E:ssä jos ja vain jos sen itseisarvon $|f|$ integraali on äärellinen:*

$$\int_E |f| < \infty.$$

Lisäksi pätee arvio

$$\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|.$$

Todistus. Meidän tarvitsee vain muistaa esitys $|f| = f^+ + f^-$, missä f^+ ja f^- ovat positiivisia funktioita. Täten, positiivisen integraalin additiivisuuden mukaan (L. 3.40), itseisarvon integraali

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- \tag{3.66}$$

on äärellinen jos ja vain jos integraalit $\int_E f^+$ ja $\int_E f^-$ ovat äärellisiä, mikä tarkoittaa funktion f integroituvuutta määritelmän mukaan.

Lisäksi:

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \le \underbrace{\left|\int_E f^+\right|}_{\ge 0} + \underbrace{\left|\int_E f^-\right|}_{\ge 0} = \int_E f^+ + \int_E f^-$$

$$\overset{3.40}{=} \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|. \quad \square$$

Huomautus 3.49. Jos f on integroituva E:ssä, niin tulosten 2.8 ja 3.48 nojalla seuraa, että $|f(x)| < \infty$ m.k. $x \in E$.

Lause 3.50. (**Majoranttiperiaate**) *Jos $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen, $|f| \leq g$ ja g integroituva E:ssä, niin silloin f on integroituva E:ssä.*

Todistus.

$$\int_E |f| \leq \int_E g < \infty \quad \square$$

Huomautus 3.51. Riittää, että $|f| \leq g$ m.k. E:ssä, eli

$$m\big(\underbrace{\{x \in E\colon |f(x)| > g(x)\}}_{=A}\big) = 0, \quad \text{jolloin} \quad \int_E |f| = \underbrace{\int_{E \setminus A} |f|}_{<\infty} + \underbrace{\int_A |f|}_{=0} < \infty.$$

Esimerkki 3.52. Olkoon $E = [1, \infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2} \sin x$. Tällöin funktio f on jatkuva joten se on mitallinen. Osoitetaan majoranttiperiaattella, että se on integroituva.

$$|f(x)| \leq x^{-2} =: g(x),$$

Nyt g on integroituva E:ssä, sillä voimme soveltaa MKL:ää kasvavaan jonoon (g_j), $g_j(x) = g(x)\chi_{[1,j]}$:

$$\Rightarrow \int_E g \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_E g_j \overset{3.36}{=} \lim_{j\to\infty} \int_1^j x^{-2}\, dx = -\lim_{j\to\infty} \Big/_1^j x^{-1} = \lim_{j\to\infty} (1 - 1/j) = 1.$$

Lause 3.53. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia E:ssä ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin*

(i) $f + g$ *integroituva E:ssä ja* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$;

(ii) λf *integroituva E:ssä ja* $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$;

(iii) $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_E f \leq \int_E g$;

(iv) Integraali yli nollamittaisen joukon on nolla: jos $m(E) = 0$ niin $\int_E f = 0$;

(v) Integraali ei näe muutoksia nollamittaisessa joukossa: jos $f = g$ m.k. E:ssä niin $\int_E f = \int_E g$.

Huomautus 3.54. Koska f, g integroituvia E:ssä niin $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ m.k. $x \in E$. Tästä seuraa, että $f + g$ on määritelty *melkein kaikkialla* E:ssä. Voi kuitenkin olla pisteitä, joissa $f(x) = \infty$ ja $g(x) = -\infty$.

Todistus. (i): Merkitään $h = f + g$. Silloin h on määritelty m.k. ja mitallinen. On helppo nähdä, että h on integroituva:

$$|h| \leq |f| + |h| \;\Rightarrow\; \int_E |h| \leq \int_E |f| + \int_E |g| < \infty.$$

On hankalampi osoittaa integraalin lineaarisuus. Yleisesti ei päde $h^+ \neq f^+ + g^+$, mutta (m.k.) E:ssä pätee:

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow\; h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

Nyt voimme integroida puolittain ja käyttää positiivisen integraalin lineaarisuutta (L. 3.40):

$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+.$$

Kaikki integraalit ovat integroituvuus-oletuksien nojalla äärellisiä, joten voimme siirtää niitä puolelta toiselle:

$$\begin{aligned}\int_E h = \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

(ii): (a) $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}(\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad &\text{ja} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^- \\ \Rightarrow \int_E (\lambda f)^+ = \lambda \int_E f^+ \quad &\text{ja} \quad \int_E (\lambda f)^- = \lambda \int_E f^-\end{aligned}$$

Väite seuraa nyt integraalin määritelmästä. (b) Tilanne $\lambda < 0$ palautuu helposti edelliseen kohtaa huomioilla

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^- \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = (-\lambda) f^+.$$

(iii): Kohtien (i) ja (ii) perusteella näemme, että erotus $g - f$ on integroituva ja

$$\int_E g = \int_E f + \int_E \underbrace{(g - f)}_{\geq 0} \geq \int_E f$$

(iv): Tulos seuraa integraalin määritelmästä ja vastaavasta tuloksesta positiivisille funktioille: jos $m(E) = 0$ niin $\int_E f^+ = 0$ ja $\int_E f^- = 0$ joten $\int_E f = 0$.

(v): Seuraa myös vastaavasta tuloksesta positiivisille funktioille: jos $f = g$ m.k. E:ssä niin $f^+ = g^+,\ f^- = g^-$ m.k. E:ssä, joten

$$\int_E f^+ = \int_E g^+ \ \text{ ja } \ \int_E f^- = \int_E g^-,$$

mistä väite seuraa nyt määritelmästä. □

Tarkistetaan, että olemme onnistuneet yleistämään integraalia myös vaihtuvamerkkisille funktioille.

Lause 3.55. *Jos $f\colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen ja Riemann-integroituva, niin silloin f on Lebesgue-integroituva E:ssä ja*

$$\int_E f = (\mathrm{R}) \int_E f\,.$$

Todistus. Funktiot $f^+ = \frac{1}{2}\big(|f| + f\big)$ ja $f^- = \frac{1}{2}\big(|f| - f\big)$ nähdään Riemann-integroituviksi. Lauseen 3.36 nojalla ne ovat mitallisia ja Riemann/Lebesgue-integraalit ovat samat. Näin ollen

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f^+ - (\mathrm{R}) \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f$$

□

3.8 Epäoleellinen vs Absoluuttinen integraali

Määrittelimme vaihtuvamerkkisen funktion Lebesgue integroituvuuden niin, että f on integroituva jos ja vain jos $|f|$ on. Integraalia jolla on tämä ominaisuus sanotaan *absoluuttiseksi integraaliksi.* Absoluuttisesti integroituvat funktiot muodostavat normiavaruuden joiden teoriasta lisää muilla kursseilla.

Riemann-integraali rajoitetun joukon yli on myös absoluuttinen integraali, mutta epäoleellinen Riemann ei ole, kuten seuraavaksi näemme.

Esimerkki 3.56 (Epäoleellinen Riemann vs Lebesgue)**.** Olkoon $E = [1, \infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1} \sin x$. Funktio f on jatkuva joten se on mitallinen.

Väite: f ei ole Leb.-integroituva E:ssä.

$$\int_E |f| = \int_1^\pi |f| + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \geq \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}}_{\text{harm. sarja}} = \infty,$$

sillä

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \overset{\text{jaksoll.}}{=} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\, dx}_{=2}.$$

Siis f ei ole integroituva E:ssä.

Kuitenkin on olemassa epäoleellinen (Riemann-)integraali

$$\lim_{c\to\infty} \underbrace{\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx}_{=I(c)}.$$

Todistus.

$$I(n\pi) = \int_1^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx}_{\text{vuorotteleva sarja}},$$

missä

$$\Big|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\Big| \searrow 0\,, \text{ kun } k \to \infty\,.$$

Leibnitzin lauseen mukaan sarja

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

suppenee, joten on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} I(n\pi) =: a$.

Jos $c \geq \pi$, niin $c \in [n\pi, (n+1)\pi)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin

$$|I(c) - I(n\pi)| = \Big|\int_{n\pi}^c \frac{\sin x}{x}\, dx\Big| \leq \int_{n\pi}^c \frac{1}{n\pi}\, dx \leq \frac{1}{n}.$$

Näin ollen $I(c) \to a$, kun $c \to \infty$. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa, että epäoleellinen integraali on olemassa.

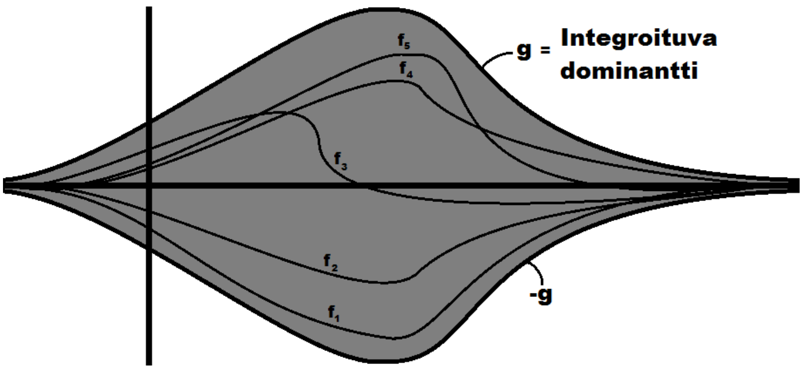
Huomioiden merkitys. Näimme, että funktion *epäoleellinen* (Riemann-)integraali voi olla olemassa (eli supeta), vaikkei funktio olisi Lebesgue-integroituva. Tämä johtuu vain siitä, että Lebesgue-integroituvuus on valittu määritellä itseisenä suppenemisena. Ei siis pidä mieltää, että Riemann-integraali on tämän ilmiön vuoksi missään syvällisessä mielessä "kykeneväisempi integroimaan eräitä funktioita". Voisimme aivan hyvin määritellä myös "epäoleellisen Lebesgue-integraalin", joka olisi yleistys vastaavasta Riemann-versiosta. Mutta, kuten mainitsimme, on hyödyllisempää määritellä integroituvuus niin että integroituvat funktiot muodostavan normiavaruuden. Epäoleellisesti integroituvilla funktioilla ei ole tätä tärkeää ominaisuutta.

Summa summarum: Tämä esimerkki havainnollistaa epäoleellisen integraalin, ja absoluuttisen integraalin välistä suhdetta. Tämä on suhde jota voi tarkastella erikseen niin Riemann- kuin Lebesgue integraaleilla. Esimerkin tarkoitus *ei ole verrata Riemann integraalia ja Lebesgue integraalia keskenään.*

3.9 Dominoidun Konvergenssin Lause (DKL)

MKL on integrointiteorian peruskivi, mutta koska se vaatii monotonisuuden se ei aina ole kovin käyttökelpoinen. Fatou ei vaatinut monotonisuutta, mutta se tarjosi vain epäyhtälön, mikä tekee siitä enemmän teoreettisen työkalun. Nyt on vuorossa konvergenssilauseista kaikkein käytännöllisin. Se ei vaadi monotonisuutta kuten MKL, se ilmaisee yhtäsuuruuden toisin kuin Fatou, ja lisäksi sallii vaihtuvamerkkiset funktiot.

DKL ja Fatoun aito epäyhtälö.



Kuten korostimme Fatoun yhtälöä tutkiessamme, on oleellisesti vain kaksi ilmiötä jotka voivat aiheuttaa aidon epäyhtälön Fatoun lemmassa: massan karkaus äärettömyyteen ja loputon heilahtelu. Siispä jos nämä mahdollisuudet sulkee pois lisäehdoilla, tulee Fatoussa pätemään yhtäsuuruus (raja-arvokin on tällöin olemassa). Tämä on DKL:n hypoteesien tarkoitus. Ensinnäkin oletamme, että ”heilahtelu loppuu lopulta”, joka matemaattisemmin ilmaistuna tarkoittaa, että raja-arvo $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ on olemassa (melkein) kaikilla x. Massan karkaus äärettömyyteen estetään puolestaan – varsin suoraviivaisesti – ”asettamalla katto”, eli matemaattisemmin ilmaistuna vaatimalla *integroituvan* dominoivan funktion olemassaolo (piirrä kuva).

Lause 3.57. (**Dominoidun konvergenssin lause**) *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia funktioita kaikilla $j \in \mathbb{N}$, siten, että on olemassa rajafunktio*

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad m.k.\ x \in E\,. \tag{3.67}$$

Jos on lisäksi olemassa <u>integroituva</u> dominantti-funktio $g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ jolle pätee

$$|f_j(x)| \le g(x), ja\ m.k.\ x \in E\,, \tag{3.68}$$

<u>kaikilla $j \in \mathbb{N}$</u>, niin silloin rajafunktio f on integroituva E:ssä ja

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,. \qquad (Huom.\ \int_E f \in \mathbb{R})$$

Huomio DKL:n käyttöön. Dominanttifunktio g EI SAA RIIPPUA INDEKSISTÄ j (yleinen virhe tenteissä); arvion $|f_j| \le g$ on tarkoitus päteä kaikilla j. Esimerkki: jonolle $f_j(x) = \sin(x)/e^{jx}$ ei voi käyttää ”dominanttijonoa” $g(x) = 1/e^{jx}$.

Toiseksi, dominanttifunktion g pitää olla integroituva, eli $\int_E g < \infty$. Esimerkki: vakiofunktio $g \equiv 1$ ei ole dominantti jonolle $f_j(x) = 1/x^j$ integrointialueessa $E = (1, \infty)$

Huomio todistukseen. Ensinnäkin, määrittelemällä f_j, f ja g uudelleen 0-mittaisessa joukossa, voidaan todistettaessa olettaa, että konvergenssi (3.67) ja arviot (3.68) pätevät *kaikilla* $x \in E$. Teemme tämän yksinkertaistuksen DKL:n todistuksessa.

Kuten MKL ja Fatou, DKL:n ydin on seuraava mittateoreettinen vastine. Tulos nojaa jälleen mitan konvergenssiin – itse asiassa mitan konvergenssi on erikoistapaus jossa joukkojono sattuu olemaan monotoninen. Ideana onkin käyttää monotonisia joukkojonoja arvioimaan yleistä jonoa. Tämän vuoksi $\liminf$ ja $\limsup$ nousevat esiin.

Lemma 3.58 (**DKL joukoille**). *Olkoon* (A_j) *jono mitallisia joukkoja jotka sisältyvät kaikki johonkin äärellismittaiseen joukkoon:* $\bigcup_j A_j \subset X$, $m(X) < \infty$. *Jos jonolla on olemassa rajajoukko* $\lim_j A_j$ *m.k., niin pätee*

$$m(\lim_j A_j) = \lim_{j\to\infty} m(A_j).$$

Lemman todistus. Fatou joukoille (L. 4.81) sanoo, että $\liminf_{j\to\infty} m(A_j) \geq m(\liminf_j A_j)$. Hypoteesin $\liminf_j A_j = \limsup_j A_j$ m.k. nojalla $m(\liminf_j A_j) = m(\limsup_j A_j)$. Nyt "limsup-Fatoun" (L. 3.46) mukaan pätee $m(\limsup_j A_j) \geq \limsup_j m(A_j)$. Näin ollen on olemassa $\lim_{n\to\infty} m(A_j)$ ja sen arvo on yhteinen $m(\liminf_j A_j) = m(\limsup_j A_j)$. □

DKL:n Todistus. Ensin palautamme DKL erikoispaukseen jossa $f_j \geq 0$, $\forall j$. Tämä on helppoa, sillä $g \geq f_j$ joten $g - f_j \geq 0$ kaikilla j. Lisäksi funktioita $g - f_j$ voi dominoida integroitavalla funktiolla $2g$: $|g - f_j| \leq 2g$. Täten jos DKL pätee positiivisille $g - f_j$, on helppo nähdä, että se pätee myös jonolle f_j.

Nyt DKL on vain edellisen mittateoreettisen aputuloksen erikoistapaus. Aloitetaan tulkitsemalla oletus, $\exists \lim_j f_j(x) =: f(x)$ kaikilla x, joukkojen $\mathcal{G}(f_j)$ kielellä. Muistamme, että lukujonon raja-arvo on olemassa jos ja vain jos sen $\liminf$ ja $\limsup$ ovat samat. Täten hypoteesimme voi yhtä hyvin ilmaista näin: $\limsup_j f_j(x) = \liminf_j f_j(x)$ kaikilla x. Tästä puolestaan seuraa, että $\limsup_j \mathcal{G}(f_j) = \liminf_j \mathcal{G}(f_j)$ lukuunottamatta joukkoa, joka sisältyy graafiin $\{(x, y) : y = f(x)\}$ joka on nollamittainen (HT). Siispä edellisen Lemman perusteella pätee

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\lim_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)). \tag{3.69}$$

Vasen puoli tiedetään integraalien $\int_E f_j$ raja-arvoksi. Toisaalta on helppo nähdä että $\lim_j \mathcal{G}(f_j) = \mathcal{G}(\lim_j f_j)$ m.k., joten oikea puoli on rajafunktion integraali $\int_E f$. □

Todistuksen tiivistelmä: Koska $\exists \lim_j f_j(x) =: f(x)$, niin "$\liminf_j \mathcal{G}(f_j) = \limsup_j \mathcal{G}(f_j)$", joten $\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\mathcal{G}(f))$. Kaikki muu on yksityiskohtia, jotka matemaatikko kykenee tarvittaessa rekonstruoimaan.

DKL:n heuristinen perustelu. Muista, että $\limsup_j A_j$ koostuu pisteistä, jotka kuuluvat äärettömän moneen joukoista A_j, kun taas $\liminf_j A_j$ pisteistä, jotka kuuluvat lopulta kaikkiin joukkoihin A_j jostakin N lähtien. Näiden tulkintojen valossa yhtälö $\liminf_j A_j = \limsup_j A_j$ tarkoittaa, että *jokainen piste kuuluu, jostakin* N *lähtien (joka riippuu pisteestä), joko jokaiseen joukoista* A_j, *tai sitten jokaiseen niiden komplementeista* A_j^c. Väljemmin ilmaistuna: *"heilahtelu*[20] *loppuu jokaisessa pisteessä äärellisessä ajassa".*

[20]Ääretön heilahtelu pisteessä x tarkoittaa, että x kuuluu sekä joukkoihin A_j, että niiden komplementteihin äärettömän monta kertaa; "x ei osaa valita kuuluako valitako joukot vai komplementit".

Esimerkki 3.59. (vanha loppukoetehtävä) Laske

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{-3/2}\sin\frac{x}{n}\,dx\,.$$

Olkoon $f_n(x) = nx^{-3/2}\sin\frac{x}{n} = \big((n/x)\sin(x/n)\big)x^{-1/2}$. Koska $(n/x)\sin(x/n)\to 1$ kun $n\to\infty$, niin on olemassa pisteittäinen raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{-1/2}$. Lisäksi, koska $|\sin t|\le t\ \forall\ t\ge 0$ niin $|(n/x)\sin(x/n)|\le 1,\ \forall\ x\in(0,1]$ *kaikilla* $n\in\mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa, että funktio $x^{-1/2} =: g(x)$ dominoi funktioita f_n. Jotta voisimme käyttää DKL:ää meidän on vielä tarkistettava, että g on *integroituva* yli välin $[0,1]$. Se pitää paikkansa, sillä

$$\int_0^1 g \overset{(*)}{=} \Big/_0^1 2\sqrt{x} = 2$$

[(∗): Tarkasti ottaen tätä ei saada suoraan Riem.-integraalina analyysin peruslauseella, sillä f on rajoittamaton välillä $[0,1]$. Voisimme kuitenkin käyttää MKL:ää jonoon $g_k := g\chi_{[1/k],1}$ kuten aikaisemmin.]

Nyt voimme DKL:n nojalla siirtää raja-arvon integraalin sisälle, jolloin näemme että

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 2.$$

Seuraava esimerkki korostaa, että vakiofunktio voi toimia dominanttina vain jos integrointialue on äärellinen.

Esimerkki 3.60. (**Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause**) Olkoon $\underline{m(E)<\infty}$ ja $f_j\colon E\to\mathbb{R}$ jono mitallisia funktioita siten, että $\underline{|f_j|\le M\ \forall j\in\mathbb{N},}$ jollakin $M<\infty$. Jos on olemassa rajafunktio $\lim_{j\to\infty} f_j =: f$ m.k., niin pätee

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j\,.$$

Todistus. Nyt on helppo valita dominanttifunktio: olkoon $g(x) = M$, jolloin suoraan oletuksen mukaan pätee $|f_j|\le g\ \forall j\in\mathbb{N}$,. Lisäksi, koska integrointijoukko E on äärellismittainen, on vakiofunktio g automaattisesti *integroituva*. DKL:n oletukset on täytetty, ja voimme siirtää raja-arvon integraalin sisälle. □

Lause 3.42 tulee olemaan keskeisessä roolissa myöhemmässä integrointiteoriassa, erityisesti funktionaalianalyysissä. Se sanoo, että integraalia kiinnitetyllä funktiolla voi ajatella mittana. Seuraava tulos kertoo, että, lukuun ottamatta tietenkin positiivisuutta, ”mitta”-tulkinta voidaan antaa myös *vaihtuvamerkkisen integroituvan* funktion integraalille. Myöhemmillä kursseilla vastaan tulee myös ”mittoja”, jotka antavat joukoille negatiivisiakin arvoja.

Lause 3.61 (Integroituvuus erillisen yhdisteen yli)**.** *Olkoot E_j, $j\in\mathbb{N}$, mitallisia ja erillisiä ja $E=\bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Mitallinen funktio f on integroituva E:ssä jos ja vain jos f on integroituva E_j:ssä kaikilla j ja pätee*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{E_j}|f| < \infty. \tag{3.70}$$

Tällöin on voimassa ”integraalin numeroituva additiivisuus joukkofunktiona”:

$$\int_E f = \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{E_j} f\,. \tag{3.71}$$

Todistus. Ensinnäkin, Lauseen 3.42 mukaan pätee

$$\int_E |f| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f|.$$

Täten $\int_E |f| < \infty$ (mikä tarkoittaa f:n integroituvuutta E:n yli) jos ja vain jos $\int_{E_j} |f| < \infty$ (mikä tarkoittaa f:n integroituvuutta E_j:n yli) kaikilla $j = 1, 2, \ldots$ ja summa (3.70) on äärellinen. Väitteen ensimmäinen osa on näin todistettu.

Jälkimmäinen osa on nyt helppo päätellä:

$$\begin{aligned}\int_E f &= \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^- \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\int_{E_j} f^+ - \int_{E_j} f^- \Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f\,. \\ &[(*):\ \text{suppenevia sarjoja}]\end{aligned}$$

□

3.10 Yhteenveto konvergenssilauseista

On ainoastaan kaksi tilannetta, jolloin raja-arvon ja integroinnin järjestystä EI saa vaihtaa. Ensimmäinen, triviaali, tilanne esiintyy kun raja-arvo $\lim_{j\to\infty} f_j$ ei ole olemassa (m.k.), mikä tarkoittaa ”loputonta heilahtelua”. Toinen tilanne esiintyy kun ”massa karkaa äärettömyyteen”(katso esimerkit Fatoun Lemman jälkeen). Sekä MKL, että DKL sulkevat pois nämä vaaratilanteet; MKL:ssa ”massa kasvaa mutta ei karkaa” kun taas DKL:ssa ”massan liike rajoitetaan integroituvalla dominanttifunktiolla”. Lisäksi molemmissa funktiojonon raja-arvo on olemassa (m.k.).

Eli lyhyesti: integroinnin ja rajankäynnin järjestyksen saa vaihtaa

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j$$

seuraavissa tilanteissa

MKL: $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$,

DKL: $|f_j| \le g$, g integroituva, eli $\int g < \infty$.

Fatoun lemma sitä vastoin ei oleta raja-arvon olemassaoloa (”heilahtelun loppumista”) eikä ”massan säilyvyyttä” ja täten se ilmaisee ”vain” epäyhtälön:

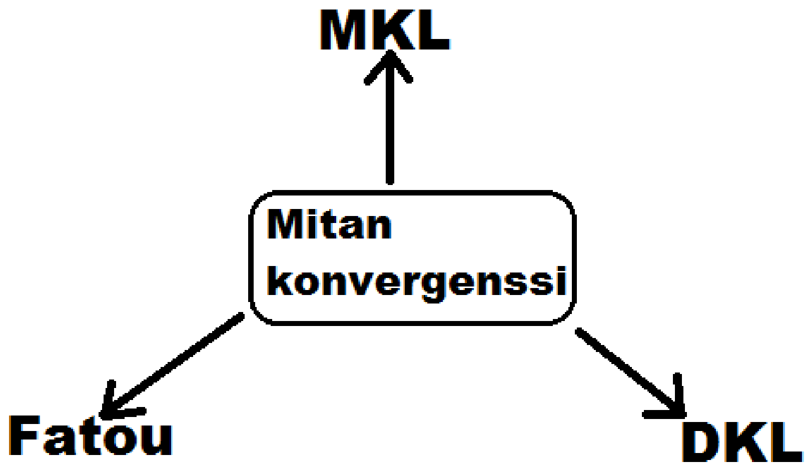
Jos $f_j \ge h$ integroituvalla h niin pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Jos taas $f_j \le h$ integroituvalla h, niin

$$\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \ge \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Syvällisen ymmärryksen tasolla on hyvä pitää mielessä, että kaikki konvergenssitulokset palautuvat graafitulkinnan kautta *mitan konvergenssiin ja sitä kautta suoraan mitan numeroituvaan täysadditiivisuuteen.* Tämä käsitelinkki yhdistää mittateorian ja integrointiteorian tärkeimmät tulokset.



Lisätieto: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Sanotaan, että Γ-mitallinen funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva joukon $E \in \Gamma$ yli, jos

$$\int_E |f| < \infty \quad \left(\iff \int_E f^+ < \infty \text{ ja } \int_E f^- < \infty \right).$$

Integraalin arvo on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Luvun 3.7 tulokset (mm. MKL, DKL, jne.) ovat edelleen voimassa (paitsi yhteydet Riemann-integraaliin). Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ joukolla X, Lebesgue-mitta m mitalla μ, jne.

4 Fubinin lauseet

Fubinin lauseet liittyvät tärkeisiin integroinnin perusoperaatioihin: "korkeampiulotteisen integraalin" laskemiseen alempiulotteisten integraalien avulla ja iteroidun integraalin järjestyksen vaihtamiseen.

Otetaan esimerkkitapaus: Olkoon $A = [a, b] \times [c, d]$ suljettu 2-väli ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Silloin on olemassa vanha kunnon Riemann-integraali

$$(R) \int_A f$$

Mutta mitä teemme jos haluamme oikeasti evaluoida tämän integraalin? Muodostamme integraalin ylä- ja alasummia? Ei, vaan käytännössä integraalit lasketaan aina analyysin peruslauseen avulla[21]. Mutta analyysin peruslausetta voi soveltaa vain yksiulotteisiin integraaleihin, ja nyt pelissä on useampi ulottuvuus.

Onneksi Vektorianalyysi -kurssin tiedot takaavat (eikä haittaa vaikket enää muista miksi, koska kohta näet kovemman version), että jatkuvan funktion f integraali yli joukon A voidaan todellakin laskea yksiulotteisina, peräkkäisinä integraaleina:

$$(R) \int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

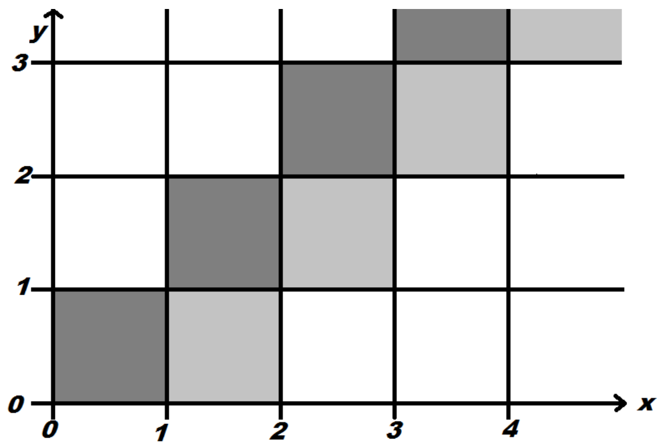
Käytännössä kaikki integraalilaskut lasketaan tällä tavoin, ja olisi kiva tietää milloin voimme menetellä näin. Myös Lebesgue integraalin tapauksessa ja yleisemmillä funktioilla?

Tässä välissä voi huomauttaa, että Fubinin voi tulkita "jatkuvana versiona summauksen järjestyksen vaihdosta":

$$\sum_n \sum_k a_{n,k} = \sum_k \sum_n a_{n,k}.$$

Ja aivan kuten järjestyksen vaihto ei ole yleisesti sallittu summilla, ei se myöskään ole yleisesti mahdollista integraaleilla:

Esimerkki 4.1 (Fubini ei päde aina)**.** Rakennamme funktion jonka integraalille "järjestyksen vaihto" ei päde. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = \chi_A - \chi_B$, missä $A =$ tummempien neliöiden yhdiste ja $B =$ vaaleampien neliöiden yhdiste (ks. kuva).



[21] Tai peruslauseen vektorianalyyttisiä yleistyksillä, Gaussin ja Stokesin lauseilla.

Nyt $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$ joten $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)\,dy = 0$. Toisaalta $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \chi_{[0,1]}(x)$ koska $f(x,y) \equiv 1$ alimmassa "A-neliössä" $[0,1]\times[0,1]$. Täten nähdään, että $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)\,dy = 1$, joka ei ole sama tulos kuin toisin päin iteroidessa. Siispä integrointijärjestystä ei saa vaihtaa ilman lisäehtoja!

Myöhemmin näemme, että konstruoimamme funktio ei toteuta Fubinin lauseiden ehtoja, sillä se on vaihtuvamerkkinen (joten Fubinin ensimmäistä lausetta ei voi käyttää) ja myös

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A\cup B} = m_2(A\cup B) = \infty$$

eli f ei ole integroituva $\mathbb{R}^2$:ssa (joten Fubinin toistakaan lausetta ei sovi soveltaa).

Milloin sitten saamme "integroida iteroiden missä järjestyksessä huvittaa"?

Varoittavasta esimerkistä huolimatta osoittautuu, että toimenpide on loppujen lopuksi sallittu *hyvin* yleisillä ja helposti muotoiltavilla ehdoilla. Nämä kaksi keskeistä tulosta kulkevat nimellä Fubinin lauseet. Vaikka niiden todistukset saattavat vaikuttaa monimutkaisilta, ideat ovat jopa yllättävän alkeellisia. Myös esiintyvät todistustekniikat ovat opettavaisia. Viimeiseksi, Fubinin lauseet ovat siitä mukavia, että niitä on hyvin helppo käyttää vaikka todistusta ei muistaisikaan.

4.1 Fubinin ensimmäinen lause ($f \geq 0$)

Notaatio: On kätevää identifioida avaruus $\mathbb{R}^{p+q}$ tuloavaruuden $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p,q \in \mathbb{N}$. kanssa:

$$z \in \mathbb{R}^{p+q} \iff z = (\underbrace{x_1,\dots,x_p}_{=x\in\mathbb{R}^p}, \underbrace{y_1,\dots,x_q}_{=y\in\mathbb{R}^q}) = (x,y).$$

Lisäksi määrittelemme *funktion* $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *sektio-funktiot* (sektiot) seuraavasti: olkoon $x \in \mathbb{R}^p$. Silloin $f_x : \mathbb{R}^q \to \dot{\mathbb{R}}$, $f_x(y) := f(x,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^q$. Sektio $f^y : \mathbb{R}^p \to \dot{\mathbb{R}}$, missä $y \in \mathbb{R}^q$ määritellään vastaavasti.

Määrittelemme myös *joukon* $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ *sektion*: olkoon $x \in \mathbb{R}^p$. Silloin $A_x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in A\}$ ja $A^y := \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in A\}$.

Fubinin ensimmäinen lause koskee ei-negatiivisia funktioita. Kaikki funktiot voidaan esittää erotuksena kahdesta ei-negatiivisesta, joten tämä ensimmäinen lause sisältää oleellisesti jo molempien Fubinien "syvällisen" informaation.

Lause 4.2. (**Fubinin 1. lause,** $f \geq 0$) *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to [0,\infty]$ *mitallinen. Tällöin*

(1) f:n sektiot f_x ovat (m_q-)mitallisia melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^p$.

(1') Vastaavasti sektiot f^y ovat (m_p-)mitallisia melkein kaikilla $y \in \mathbb{R}^q$.

(2) Integraali-funktio (joka on hyvin määritelty kohdan (1) nojalla)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\,dm_q(y)$$

on (m_p-)mitallinen.

(2') Integraali-funktio (joka on hyvin määritelty kohdan (1') nojalla)

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\,dm_p(x)$$

on (m_q-)mitallinen.

(3) Voimme integroida kohtien (2) ja (2') integraali-funktioita ja pätee

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{(3a)}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$
$$\overset{(3b)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (+\infty \text{ sallittu})$$

Huomautus 4.3. Lukuun ottamatta "positiivisuus-rajoitusta" oletukset ovat minimaaliset: vaadimme vain funktion $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisuutta, mikä on väistämätöntä, koska tarkoituksemme on integroida sitä.

Käytännössä kohta (3), eli integraalin lasku iteroiduilla integraaleilla, on Fubinin tärkein anti. Teoreettisemmassa mielessä sitä vastoin kohdat (1) ja (2) ovat tärkeimpiä. Ilman niitä kohdan (3) iteroidut integraalit eivät olisi hyvin määriteltyjä. Ja itseasiassa Fubinin todistuksen suurin haaste on osoittaa mitallisuusominaisuudet (1) ja (2). Sen jälkeen integraalin iterointi on helppo seuraus. [22]

Todistus: Palautus karakteristisiin funktioihin. Ensimmäinen askel on osoittaa, että Fubini riittää todistaa karakteristisille funktioille. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen. Silloin se on *monotoninen pisteittäinen raja yksinkertaisia funktioita* $\varphi_j \nearrow f$ (Lause 2.24). Olkoon funktioilla φ_j esitykset $\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}$, $j = 1, 2, \ldots$. Näin ollen MKL sanoo, että pätee

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \lim_{j\to\infty} \varphi_j \\
&\overset{MKL}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \varphi_j \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{A_{i,j}}\,. \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

Oleta nyt, että Fubini pätee karakteristisille funktiolle χ_A, missä $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mitallinen joukko. Silloin voimme jatkaa edellistä yhtälöketjua ja päätellä

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{A_{i,j}}}_{\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{A_{i,j}}\, dm_q\right) dm_p} &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\, dm_q \right) dm_p \\
&\overset{MKL}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{j\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\, dm_q \right) dm_p \\
&\overset{MKL}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\, dm_q \right) dm_p \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f\, dm_q \right) dm_p. \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

Yhdessä edellisen yhtälöketjun (4.72) kanssa tämä osoittaa, että Fubini pätee tällöin myös yleiselle mitalliselle funktiolle f.

[22] Kohdat (1) ja (2) eivät päde Riemann-integraalille, jonka vuoksi Riemann-integraalilla ei ole Fubinin täydellistä vastinetta.

Tämä alkutarkastelu, joka käytti vain tulosta $\varphi_j \nearrow f$, osoittaa, että *Fubinin todistus palautuu näennäisesti paljon yksinkertaisempaan erikoistapaukseen jossa f on karakteristinen funktio.*

4.2 Fubini karakteristiselle funktiolle

Lemma 4.4 (Fubini ulko- ja sisämitalle). *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ mitallinen. Tällöin sektio A_x on m_q-mitallinen m.k. $x \in \mathbb{R}^p$* [23]*, ja kuvaus $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{Ax}\, dm_q(y)$ on mitallinen funktio. Lisäksi pätee*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_A) = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{Ax}\ dm_q(y)\ dm_p(x). \tag{4.74}$$

Koska, $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_A = m_{p+q}(A)$ ja $\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{Ax}\, dm_q(y) = m_q(A_x)$, niin karakteristisen funktion tapauksessa Fubini saa mittateoreettisemman muotoilun:

$$m_{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\ dm_p(x). \tag{4.75}$$

Tämän voi todistaa yllättävän yksinkertaisesti. Tarvitsemme vain mitallisuuden, ulko-mitan sekä sisämitan määritelmiä! Itseasiassa todistuksen ydin näyttäytyy selkeimmin kun todistamme vielä yleisemmät tulokset ulko- ja sisämitoille.

Tuloksen muotoilu vaatii ei-mitallisten funktioiden "integrointia", joten esittelemme seuraavat teoreettiset työkalut:

Määritelmä 4.5 (Ylä- ja alaintegraali)**.** Positiivisen funktion f (Lebesguen) yläintegraali on

$$\overline{\int} f := (R) \int_0^\infty m^*(f^{-1}[t,\infty])\ dt, \tag{4.76}$$

ja alaintegraali on

$$\underline{\int} f := (R) \int_0^\infty m_*(f^{-1}[t,\infty])\ dt. \tag{4.77}$$

On helppo nähdä/todistaa, että nämä integraalit vastaavat ylä- ja alavaakapalkkien alojen raja-arvoja tapauksessa jossa emme tiedä alkukuvia mitallisiksi joukoiksi. Perustulos on, että ne yhtyvät jos ja vain jos funktio f on mitallinen (minkä vuoksi Lebesgue integraali yleensä määritelläänkin vain mitallisille funktioille):

Lemma 4.6. *Funktion f ylä- ja alaintegraalit ovat samat,*

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f, \tag{4.78}$$

jos ja vain jos funktio f on mitallinen.

Todistus. Koska $m^*(f^{-1}[t,\infty]) \geq m_*(f^{-1}[t,\infty])$ kaikilla x, niin *melkein kaikilla* t täytyy päteä $m^*(f^{-1}[t,\infty]) = m_*(f^{-1}[t,\infty])$ joten $f^{-1}[t,\infty]$ nähdään mitalliseksi.

Vastaoletus: alkukuva $f^{-1}[s,\infty]$ ei ole mitallinen. Kuitenkin nyt löytyy jono $t_i \nearrow s$, kun $i \to \infty$, joilla alkukuvat $f^{-1}[t_i,\infty]$ ovat mitallisia. Näin ollen leikkaus $\bigcap_i f^{-1}[t_i,\infty] = f^{-1}[s,\infty]$ on mitallinen, mikä on ristiriita. □

[23]Joten kuvaus $y \mapsto \chi_{Ax}(y)$on mitallinen funktio m.k. x, ja sisäintegraali on määritelty (m.k.).

Lemma 4.7 (Fubini ulko- ja sisämitalle)**.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$*. Tällöin pätee*

$$m^*_{p+q}(A) \geq \overline{\int_{\mathbb{R}^p}} m^*_q(A_x)\ dm_p(x), \tag{4.79}$$

ja

$$m_{*p+q}(I \cap A) \leq \underline{\int_{\mathbb{R}^p}} m_{*q}(I_x \cap A_x)\ dm_p(x). \tag{4.80}$$

Todistus. Ulkomitta $m^*_{p+q}(A)$ joka on infimum Lebesguen peitteiden summasta, joten otamme joukon A mielivaltaisen peitteen $\mathcal{F} = \{J\}$ ja lähdemme tutkimaan summaa $\mathcal{S}(\mathcal{F}) := \sum_J \ell(J)$.

Jokainen $\mathbb{R}^{p+q}$:n n-väli J on karteesinen tulo $J_p \times J_q$, missä J_p on p-väli ja J_q on q-väli. Karteesisen tulon sektiot on helppo ilmaista: $J_x = J_q$ jos $x \in J_p$, ja muuten tyhjä joukko. Näin pätee identiteetti

$$\ell(J) = \ell(J_p \times J_q) = \underbrace{\ell(J_p)}_{m_p(J_p)}\, \ell(J_q) = \int_{\mathbb{R}^p} \ell(J_x)\ dm_p(x). \tag{4.81}$$

(Oleellisesti kyseessä on Fubini, eli yhtälö (4.75), n-väleille.)

Voimme siis esittää summan $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ vastaavasti integraalilla

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{F}) := \sum_{J\in\mathcal{F}} \ell(J) &= \sum_{J\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^p} \ell(J_x)\ dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \big(\sum_{J\in\mathcal{F}} \ell(J_x)\big)\ dm_p(x). \end{aligned} \tag{4.82}$$

(Numeroituvan summan voi siirtää integraalin sisälle Bebbo-Levin lauseen nojalla.) Seuraavaksi huomaamme, että $\sum_{J\in\mathcal{F}} \ell(J_x) \geq m^*_q(A_x)$, sillä q-välit $\{J_x\}$ muodostavat Lebesguen peitteen sektiolle A_x. (Helppo nähdä kun piirtää kuvan.) Tämä alaraja $m^*_q(A_x)$ on riippumaton Lebesguen peitteestä $\mathcal{F}$ ja näin ollen olemme todistaneet ensimmäisen osan lemmasta.

Sisämitan epäyhtälö voidaan todistaa samoin lähtien määritelmästä $m_*(I\cap A) := \ell(I) - m^*(I\setminus A)$ ja esittämällä ulkomitta Lebesguen peitteillä ja arvioimalla integraaleilla kuten edellä.

□

Lauseen 4.4. todistus.

Oletetaan nyt, että A on mitallinen, eli $m^*(I\cap A) \leq m_*(I \cap A)$ mielivaltaisella $(p+q)$-välillä I. Nyt

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\mathbb{R}^p}} m^*_q(I_x \cap A_x)\ dm_p(x) &\leq m^*_{p+q}(I\cap A) \\ &\leq m_{*p+q}(I \cap A) \\ &\leq \underline{\int_{\mathbb{R}^p}} m_{*q}(I_x \cap A_x)\ dm_p(x). \end{aligned} \tag{4.83}$$

Tämä voi päteä vain jos $m^*_q(I_x\cap A_x) \leq m_{*q}(I_x\cap A_x)$ – eli sektio A_x on mitallinen – melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^p$. Lisäksi tällöin ylä- ja alaintegraalit yhtyvät, mikä tarkoittaa, että kuvaus $x \mapsto m_q(A_x)$ on mitallinen funktio. □

4.3 Fubinin toinen lause (vaihtuvamerkkiset funktiot)

Entä kun mitallinen funktio saa sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja? Koska vaihtuvamerkkisen funktion integraali määritellään ei-negatiivisten funktioiden integraalien erotuksena, on suoraviivaista soveltaa Fubinin ensimmäistä lausetta vaihtuvamerkkisiin funktioihin.

Lause 4.8. (**Fubinin 2. lause**, vaihtuvamerkkiset funktiot) *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen ja* integroituva*, eli*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| < \infty.$$

Tällöin

(1) Sektio f_x *on integroituva* $\mathbb{R}^q$*:ssa m.k.* $x \in \mathbb{R}^p$;

(1') Sektio f^y *on integroituva* $\mathbb{R}^p$*:ssä m.k.* $y \in \mathbb{R}^q$;

(2) Integraalifunktio $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y)$ *on integroituva* $\mathbb{R}^p$*:ssä, eli*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) \right| dm_p(x) < \infty\,;$$

(2') Integraalifunkto $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\, dm_p(x)$ *on integroituva* $\mathbb{R}^q$*:ssa;*

(3) f *on integroituva* $\mathbb{R}^{p+q}$*:ssa ja*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (\in \mathbb{R})$$

Huomautus 4.9. Kuten ensimmäisessä Fubinissa, oleellinen sisältö on kohdassa (3). Kohdat (1) ja (2) ovat "vain" huomioita, joita tarvitaan viimeisen kohdan turvalliseen määrittelyyn. Myös alkuhypoteesi f:n integroituvuudesta on "väistämätön", koska muuten koko integraali $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f$ ei ole määritelty.

Fubinin ensimmäisen lauseen mukaan pätee

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f_x(y)|\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f^y(x)|\, dm_p(x) \right) dm_q(y),$$

joten f:n integroituvuus voidaan tarkistaa iteroidulla integraalilla.

Todistuksen tiivistelmä. Meidän ei tarvitse muuta kuin esittää vaihtuvamerkkisen funktion integraali posiviivisen ja negatiivisen osien integraalien erotuksena, soveltaa niihin Fubinin ensimmäistä, ja lopuksi nitoa osat yhteen Lauseen 3.53 avulla.

Todistus. Todistamme kohdat (1), (2) ja kohdasta (3) ensimmäisen yhtälön. Muut menevät identtisesti.

Lähdetään liikkeelle suoraviivaisesti: kirjoitetaan auki vaihtuvamerkkisen funktion integraalin määritelmä ja sovelletaan Fubinin ensimmäistä lausetta ei-negatiivisiin funktioihin f^+ ja f^-.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &\overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x).\end{aligned}$$

Näin pitkälle pääsimme ilman mitään ylimääräisiä päättelyjä. Olemme valmiit jos pystymme yhdistämään ensim uloimmat integraalit

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \\ &\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x).\end{aligned} \tag{4.84}$$

jonka jälkeen haluaisimme yhdistää myös sisemmät integraalit (ainakin m.k. x):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, dm_q(y) &= \int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\left(f_x^+(y) - f_x^-(y)\right)}_{=f_x(y)} dm_q(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y).\end{aligned} \tag{4.85}$$

Siispä ainoa tehtävämme on siis oikeuttaa kyseiset operaatiot. Integraalien yhdistämiseen käytämme Lauseen 3.7 kohtaa (i). Sen mukaan meidän pitää ensiksikin osoittaa, että funktiot $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x^{\pm}(y)\, dm_q(y)$ ovat integroituvia. Mutta tämä seuraa suoraan hypoteeseista, sillä

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) \right| \right) dm_p(x) \le \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f_x(y)|\, dm_q(y) \right) dm_p(x) < \infty.$$

Täten ensimmäinen yhdistysoperaatio (4.84) on sallittu (ja samalla väitteen kohta (2) todistettu).

Toista yhdistysoperaatiota (4.85) varten meidän on Lauseen 3.53 mukaan tarkistettava, että funktiot $y \mapsto f_x^{\pm}(y)$ ovat integroituvia $\mathbb{R}^q$:ssa m.k. $x \in \mathbb{R}^p$;. Tämäkin on helppoa, koska Fubinin ensimmäisen lauseen mukaan

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x^{\pm}(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^{\pm} < \infty,$$

joten Lauseen 3.53 mukaan $\int_{\mathbb{R}^q} f_x^{\pm}(y)\, dm_q(y) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^p$. Täten myös yhdistys (4.85) on sallittu ja todistus on valmis. □

Joitakin sovelluksia

Esimerkki 4.10. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$, jolle $m_2^*(E) = 0$ (joten se on mitallinen). Väite: *Melkein jokaisen* sektion E_x ja E^y 1-ulotteinen Lebesguen ulkomitta on nolla: $m_1^*(E_x) = m_1^*(E^y) = 0$, joten melkein jokainen sektio on mitallinen (erikoistapaus edellisistä tuloksista).

Ratk.

Väite siis tarkoittaa:

$$m_1^*(E_x) = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}, \quad \text{ja vast.} \quad m_1^*(E^y) = 0 \quad \text{m.k. } y \in \mathbb{R}.$$

Tämä seuraa ulkomitta-Fubinista[24] karakteristisille Funktioille, jonka mukaan

$$0 = m_2^*(E) \geq \overline{\int}_R m_1^*(E_x)\, dx$$

Positiivisen funktion yläintegraali on nolla jos ja vain jos integrandi häviää melkein kaikkialla, joten $m_1^*\big(E_x\big) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$.

Samoin $m_1^*\big(E^y\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$.

Lisätietoja: Jos $E \subset \mathbb{R}^2$ on mitallinen osajoukko siten, että $m_1\big(E_x\big) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$ (tai $m_1\big(E^y\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$), niin Lauseen 4.75 mukaan pätee käänteinen suunta: $m_2(E) = 0$.

Oletus $E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^2$ on kuitenkin oleellinen! On nimittäin olemassa joukko $E \subset [0,1] \times [0,1]$ siten, että $m_1\big(E_x\big) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$, mutta E ei ole mitallinen (joten $m_2^*(E) > 0$).

Itse asiassa ei mitallisuus todistetaan itse Fubinin lauseen avulla seuraavalla ovelalla argumentilla: Koska sektiot E_x ovat mitallisia m.k. x ja sektiot E^y mitallisia m.k. y, voimme muodostaa integraalit

$$\int_R m_1{*}(E_x)\, dx \quad ja \quad \int_R m_1{*}(E^y)\, dy \tag{4.86}$$

Jos joukko E on mitallinen, niin Fubinin lauseen mukaan integraalien arvot ovat samat, eli $m_2(E)$. Voidaan kuitenkin konstruoida – reaalilukujen hyvinjärjestystä käyttäen – joukko E joilla edelliset integraalit eivät ole samat. Tarkempia yksityiskohtia: Rudin, *Real and Complex Analysis*, s. 167).

Esimerkki 4.11. Laske todennäköisyys-teoriassa ja kvanttimekaniikassa tärkeä integraali

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}$$

Ratkaisu. Koska kaikki käytännön funktiot lasketaan Riemann-integraalilla soveltaen analyysin peruslausetta, muutamme annetun integraalin muotoon

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

(MKL sovellettuna funktioihin $f_n(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\chi_{B(0,n)}(x,y)$.) Nyt kriittinen keksintö on muuttaa integraali napakoordinaatteihin muunnoksella

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad x^2+y^2 = r^2\,, \quad \text{jakobiaani } J(r,\varphi) = r\,.$$

Vektorianalyysistä tiedämme, että

$$(\mathrm{R}) \int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = (\mathrm{R}) \int_{B(0,n)} e^{-r^2} r\, dr d\varphi$$

[24]Koska E tiedetään mitalliseksi, voitaisiin käyttää myös Lausetta 4.75.

Nyt Fubinin ensimmäisen lauseen perusteella voimme iteroida integraaleja:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_{B(0,n)} e^{-r^2} r\,dr d\varphi &= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr d\varphi \\ &= 2\pi\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n re^{-r^2} \\ &= \pi\lim_{n\to\infty} \Big/_0^n - e^{-r^2} \\ &= -\pi\lim_{n\to\infty}\big(e^{-n^2}-1\big) = \pi.\end{aligned} \tag{4.87}$$

Esimerkki 4.12. Laske nyt yksiulotteinen versio edellisestä tehtävästä:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}.$$

<u>Ratkaisu.</u> Edellisen tehtävän ja Fubinin ensimmäisen lauseen mukaan

$$\begin{aligned}\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right)dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2.\end{aligned}$$

Näin ollen $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Esimerkki 4.13 (”Kaavan (2.34) todistus” Fubinilla)**.** Olkoon $f \geq 0$ mitallinen. Käytimme kaavan

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty m(f^{-1}(t,\infty])\,dt, \tag{4.88}$$

variaatiota määrittelemään Lebesgue integraalin, mutta sen voi myös ”todistaa” Fubinilla:

Meidän tarvitsee vain esittää luku $f(x)$ yksiulotteisen välin mittana $m_1[0,f(x))$, jonka puolestaan voi esittää integraalina $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\,dm_1(y)$. Käyttämällä tätä triviaalia esitystä saamme iteroidun integraalin

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m_1[0,f(x))\,dm_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\,dm_1(y)\,dm_n(x).\end{aligned} \tag{4.89}$$

(4.90)

Nyt funktio $(x,y) \mapsto \chi_{[0,f(x))}(y) = \chi_{\mathcal{G}(f)}(x,y)$ on mitallinen (koska joukko $\mathcal{G}(f)$ on m_{n+1}-mitallinen). Täten Fubinin ensimmäisen lauseen nojalla voimme vaihtaa iteraation järjestyksen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\,dm_1(y)\,dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,f(x))}(y)\,dm_n(x)\,dm_1(y) \\ &= \int_0^\infty m_n(f^{-1}(y,\infty])\,dm_1(y),\end{aligned} \tag{4.91}$$

sillä $\chi_{[0,f(x))}(y) = 1$ jos ja vain jos $0 \leq y < f(x)$ eli $y \geq 0$ ja $x \in f^{-1}(y,\infty]$. □

Lisämateriaalia

5 Liitteet

5.1 Hausdorffin mitta ja dimensio.

Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ halkaisija on

$$d(A) = \sup\{|x-y| \colon x, y \in A\}, \quad d(\emptyset) = 0.$$

Olkoon $0 \le s < \infty$ ja $\delta > 0$. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin asetetaan

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \colon A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j,\ d(E_j) \le \delta\Big\},$$

missä tehdään sopimukset $d(\{x\})^0 = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $d(\emptyset)^s = 0$ $\forall s \ge 0$. (Yllä $E_j \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa osajoukko.)

Havaitaan: $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ (inf yli pienemmän joukon).

Määritelmä 5.14. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ s-ulotteinen Hausdorffin (ulko-)mitta on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(Voi olla $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.)

Lause 5.15. *Olkoon $0 \le s < \infty$. Silloin $\mathcal{H}^s$ on ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä.*

Todistus. HT □

$\mathcal{H}^s$-mitalliset joukot, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n)$, määritellään Carathéodoryn ehdon (1.28) avulla.
Lisätieto:

$$\operatorname{Bor} \mathbb{R}^n \subset \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n).$$

Lause 5.16. *Jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa 1-käsitteinen luku $s = s(A) \ge 0$, ns. A:n* Hausdorffin dimensio*, s.e.*

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ ja}$$
$$\mathcal{H}^{s-\varepsilon}(A) = +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, s].$$

Todistus. Väite 1:

$$s \ge 0 \ \text{ ja } \ \mathcal{H}^s(A) < \infty \ \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0 \ \forall t > s.$$

Olkoon $\delta > 0$. $\Rightarrow$ $\exists$ peite $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \supset A$ s.e. $d(E_j) \le \delta$ $\forall j$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^s(A) + 1 \overset{\text{olet.}}{<} \infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^t_\delta(A) \overset{\inf}{\le} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^t = \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \underbrace{d(E_j)}_{\le \delta}{}^{t-s} \overset{t>s}{\le} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s$$
$$\le \delta^{t-s} \underbrace{\big(\mathcal{H}^s(A) + 1\big)}_{<\infty}$$

Annetaan $\delta \to 0 \;\Rightarrow\; \delta^{t-s} \to 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0$ eli Väite 1 todistettu. Asetetaan

$$s(A) = \inf\{t > 0 \colon \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Väite 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{s(A)+\varepsilon}(A) = 0\ \forall \varepsilon > 0$. Toisaalta Väite 1 $\Rightarrow$ jos $0 \le s < t < \infty$ ja $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$. $\square$

Huomautus 5.17. (1) Hausdorff-mitta voidaan määritellä samalla tavalla missä tahansa metrisessä avaruudessa (X, d) (joukon $A \subset X$ halkaisija on $d(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in X\}$).

(2) $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta, ts. $\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A = A$:n alkioiden lukumäärä.

(3) $\mathbb{R}^n$:ssä pätee: $\mathcal{H}^n = c\, m_n^*$, missä $c = c(n)$ on vakio. Siksi usein $\mathcal{H}^s$ normeerataan kertomalla se tietyllä s:stä riippuvalla vakiolla.

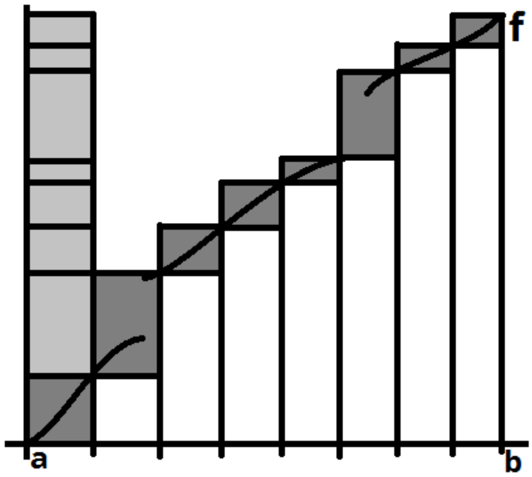
(4) $A \subset \mathbb{R}^n$ annettu $\Rightarrow$ Hausdorff-dimensio $s(A) \in [0, n]$ (ei tarvitse olla kokonaisluku). Vastaava mitan arvo $\mathcal{H}^{s(A)}(A)$ voi olla mikä tahansa luku $\in [0, +\infty]$.

(5) $\mathbb{R}^n$:ssä $\mathcal{H}^s$, $0 \le s \le n$, sopii hyvin mittaamaan "pieniä" joukkoja. Esim. 0-mittaisella joukolla A, $m_n(A) = 0$, voi olla $\mathcal{H}^s(A) > 0$, $0 \le s < n$. $\mathcal{H}^s(A)$ "näkee" A:n "hienorakennetta" ehtojen $d(E_j) \le \delta$, $\delta \to 0$ takia.

5.2 Miksi monotoninen funktio on Riemann-integroituva

Olkoon funktio $f : [a, b] \to [0, \infty]$ kasvava. Perustelemme jo tutulla päättelyllä miksi se on Riemann-integroituva.

Valitsemme x-akselin tasaisen ε-jaon. Tällöin on helppo pitää kirjaa ylä- ja alasummien erotuksesta.



Kuten kuvasta on helppo nähdä, ylä- ja alapystypalkkien erotukset voi ”viedä vasemmalle ja pinota päällekäin”. Tällöin erotuksen alaksi nähdään yhden korkean ε-levyisen palkin ala. Tämä saadaan mielivaltaisen pieneksi jakoparametrilla ε. Näin ollen f on Riemann-integroituva.

5.3 Integraali-todistukset konvergenssilauseille

MKL

Kunnioittaaksemme matematiikan traditionaalisia lähestymistapoja esitämme kiinnostuneille myös todistuksen joka käyttää integraalin määritelmää ja yksinkertaisia funktioita. Se on aavistuksen helpompi yleistää abstraktiin integrointiteoriaan, mutta se ei ehkä tarjoa niin selkeää intuitiota MKL:n perusteisiin.

MKL:n "standardi" todistus. Triviaali suunta "$\leq$". Ensinnäkin voimme olettaa että $E = \mathbb{R}^n$ (muutoin korvataan f_j, f funktioilla $f_j\chi_E$, $f\chi_E$ (huom. $f_j\chi_E \nearrow f\chi_E$)).

On korostettava, että suunta "$\leq$" on triviaali: koska $f_j \leq f$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, pätee

$$\int f_j \leq \int f, \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Täten pätee myös $\lim_{j\to\infty} \int f_j \leq \int f$.

Epätriviaali suunta "$\geq$": Ensimmäinen askel: *"Skaalaus":* Riittää osoittaa, että epäyhtälö $\lim_{j\to\infty} \int f_j \geq b \int f$ pätee kaikilla $0 < b < 1$. (Voimme siis hieman helpottaa tehtäväämme ja "laskea rajafunktion f graafia".)

Toinen askel: *Integraalin määritelmä.* Lebesgue integraalin määritelmän mukaan riittää osoittaa, että

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \geq b \int \varphi,$$

kaikilla yksinkertaisilla $\varphi \leq f$.

Kolmas askel: *Graafien kirjanpito.* Joten olkoon φ mielivaltainen. Merkitään

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_k(x) \geq b\varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \big(f_k - b\varphi\big)(x) \geq 0\} \quad \text{(mitallinen joukko).}$$

Koska $f_k \leq f_{k+1}, k = 1, 2, \ldots$ pätee sisältyvyys $E_k \subset E_{k+1}, , k = 1, 2, \ldots$. Ja nyt seuraa tärkeä huomio: jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ löytyy k_x siten, että $f_{k_x}(x) \geq b\varphi(x)$. Perustelu: jos $f(x) = 0$, niin myös $\varphi(x) = 0$; jos taas $f(x) > 0$, niin väite seuraa tiedosta $\lim_{j\to\infty} f_j(x) > b\varphi(x)$. Huomio voidaan ilmaista joukkojen kielellä seuraavasti:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(Tämä on matemaattinen ilmaisu ajatukselle "jokaisessa pisteessä funktioiden f_k graafit kipuavat ennemmin tai myöhemmin rajagraafin $b\varphi$ yläpuolelle".)

Voimme nyt tehdä sarjan alkeellisia arviointeja: Joukon E_k määritelmästä seuraa, että $f_k\chi_{E_k} \geq b\varphi\chi_{E_k}$. Joten integroitaessa yli joukon E_k on voimassa lupaava epäyhtälö $\int_{E_k} f_k \geq b \int_{E_k} \varphi$. Yhdistetään se triviaalin arvioon $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq \int_{E_k} f_k$, jolloin saamme

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq b \int_{E_k} \varphi, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.92}$$

Vasen puoli on kiinnitetty luku (ei riipu k:sta), kun taas oikean puolen integraalit suppenevat (monotonisuuden nojalla) raja-arvoonsa $b \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi$, kun päästämme $k \to \infty$. Näin ollen epäyhtälö (5.92) säilyy myös rajalla ja pätee

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq b \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi.$$

Viimeinen askel: *Yksinkertaisen funktion integraali "mittana"*. Osoitamme, että seuraava MKL:n erikoistapaus pätee yksinkertaiselle funktiolle: $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi = \int \varphi$. Tämä seuraa yksinkertaisen funktion integraalin määritelmästä $\int_{E_k} \varphi = \sum_{m=1}^{N} a_m m(E_k \cap A_m)$ ja mitan konvergenssista jonka mukaan $\lim_{k\to\infty} m(E_k \cap A_m) = m(A_m)$, kun $\bigcup_k E_k = \mathbb{R}^n$.

Lopuksi, koska kaikilla $0 < b < 1$ ja kaikilla yksinkertaisilla $\varphi \le f$ pätee

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \ge b \int \varphi,$$

niin epäyhtälö pätee myös kun $b = 1$, ja sen jälkeen väite seuraa tiedosta $\int_E f = \sup\{\int_E \varphi \colon \varphi \in Y,\ \varphi \le f\}$ (Korollaari 2.25). $\square$

Fatou

Esitämme "lim inf-Fatoulle" myös integraalitodistuksen, joka tarjoaa tekniikkaharjoitusta MKL:n soveltamiseen.

Standarditodistus MKL:n avulla. Tämänkin idea on suoraviivainen. Meidän riittää kirjoittaa auki määritelmiä ja käyttää MKL:ää.

Määritelmän mukaan $\liminf_j f_j := \lim_{j\to\infty} \inf_{k\ge j} f_k$. Sen jälkeen riittää huomata, että jono $(\inf_{k\ge j} f_k)_j$ on nouseva, ei-negatiivinen (mitallinen) funktiojono. Täten voimme soveltaa Monotonista konvergenssia

$$\int_E \lim_{j\to\infty} \inf_{k\ge j} f_k \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_E \inf_{k\ge j} f_k.$$

Nyt väite (5.93) saa muodon

$$\lim_{j\to\infty} \int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \lim_{j\to\infty} \inf_{k\ge j} \int_E f_k.$$

Riittää siis osoittaa $\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \inf_{k\ge j} \int_E f_k$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$[25]. Huomaamme, että koska $\inf_{k\ge j} f_k \le f_i$ kaikilla $i \ge j$, pätee myös $\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \int_E f_i$ kaikilla $i \ge j$. Ottamalla infimum yli kaikkien $i \ge j$, saamme halutun arvion

$$\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \inf_{i\ge j} \int_E f_i.$$

$\square$

DKL

Integraalia käyttävä todistus ei ole muuta kuin *Fatoun lemman kaksinkertainen sovellus*. Tarvitsemme aluksi Fatoun hyödyllisen laajennoksen vaihtuvamerkkisille funktioille:

Lemma 5.18. (**Fatoun yleistys**). *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Oletetaan, että löytyy integroituva funktio h siten, että $f_j \ge h\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j. \tag{5.93}$$

[25] Tämä on intuitiivisesti varsin selvää kun sitä hetken meditoi.

Eli Fatou pätee vaikka oletuksissa ”nollafunktio korvataan integroituvalla ala-rajalla”.

Todistus. Koska $f_j \geq h \; \forall \; j \in \mathbb{N}$, niin $f_j - h \geq 0 \; \forall \; j \in \mathbb{N}$, joten tavallisen Fatoun mukaan pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty}(f_j - h) \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E (f_j - h).$$

Näin ollen, sillä h on *integroituva*, saamme

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j - \int_E h \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j - \int_E h,$$

mikä viimeistelee todistuksen. □

Samalla vaivalla voimme johtaa Fatoun sisartuloksen. Jos olet miettinyt päteekö vastaava tulos kun $\liminf$ korvataan $\limsup$:lla, olet oikeilla jäljillä. Näihin kaikkiin voi viitata Fatoun lemmana.

Korollari 5.19. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Oletetaan, että löytyy integroituva funktio h siten, että $f_j \leq h \; \forall \; j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \geq \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j. \tag{5.94}$$

Todistus. Koska $f_j \leq h \; \forall \; j \in \mathbb{N}$, niin $-f_j \geq -h \; \forall \; j \in \mathbb{N}$, joten edellisen Fatoun mukaan pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} -f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E -f_j.$$

Nyt esimerkiksi $\liminf_{j\to\infty} -f_j = \lim_{j\to\infty} \inf_{i\geq j} -f_i = -\lim_{j\to\infty} \sup_{i\geq j} f_i = -\limsup_{j\to\infty} f_j$, joten saamme

$$-\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \leq -\limsup_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

□

Näillä työkaluilla suuri Dominoidun Konvergenssin Lause on parin rivin päättely:

DKL:n Standarditodistus. Olettamme edelleen, että konvergenssi (3.67) ja arviot (3.68) pätevät *kaikilla* $x \in E$.

Toiseksi, rajafunktion integroituvuus seuraa arvioista $|f| \leq \sup_j |f_j| \leq g$ ja majoranttiperiaatteesta (L. 3.50).

Lopuksi, pääväite saadaan Fatoun ”tandemsovelluksella”:

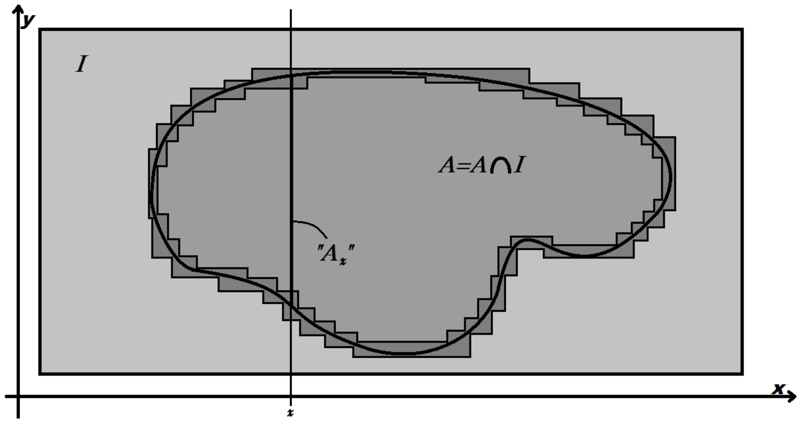
$$\limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \overset{Fatou}{\leq} \int_E \underbrace{\limsup_{j\to\infty} f_j}_{=f} = \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \overset{Fatou}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Toisaalta $\limsup$ on aina vähintään $\liminf$, joten yhtäsuuruus pätee ja väite on todistettu. □

5.4 Fubinista

Heuristinen perustelu miksi sektiot $(I \cap A)_x = I_x \cap A_x$ ovat m_q-mitallisia, jos joukko $I \cap A$ on m_{p+q}-mitallinen. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $A \subset I$.

Jos $\mathcal{F} = \{J\}$ on koko joukon A Lebesguen peite, niin silloin siitä johdettu sektioiden perhe $\mathcal{F}_x := \{J_x\}$ on sektion A_x Lebesguen peite. Sama periaate pätee sisäarviolle: jokainen koko joukon



A sisäarvio antaa sektioiden A_x sisäarviot. Ja, kuten kuva voimakkaasti vihjaa, mitä paremmat ulko- ja sisäarviot valitsemme koko joukolle A, sitä paremmat sisä- ja ulkoarviot saamme myös sektiolle A_x jokaisessa pisteessä x. Todistuksen pohjimmainen moraali on, että koska joukon A arviot yhtyvät, niin silloin – suhteellisen ymmärrettävästi – myös siivujen A_x arviot yhtyvät, ainakin melkein kaikilla x. Se taas tarkoittaa, että siivut A_x ovat mitallisia. Yksinkertaista!

Fubinin Moraali: Iteroidut integraalit ylä- ja alaarvioina. Fubinin takana on kuin onkin lopulta hyvin yksinkertainen periaate joka on pelkistyy edellisen todistuksen kuvassa: Jos joukkoa A voi approksimoida mielivaltaisen hyvin, niin silloin myös sen siivuja A_x voi. Jos on valmis joustamaan täsmällisyydestä asiaa voi valaista myös seuraavasti:

Ulkomitta ja sisämitta tarjoavat yhden tavan arvioida joukon A mahdollista mittaa. Iteroidut integraalit tarjotavat uuden, entistä tarkemman arvion. Määritellään "integraaliulkomitta":

$$m^{**}_{p+q}(A) := \overline{\int}_{\mathbb{R}^p} m^*_q(A_x)\ dm_p(x), \tag{5.95}$$

ja "integraalisisämitta"

$$m_{**p+q}(A) := \underline{\int}_{\mathbb{R}^p} m_{*q}(A_x)\ dm_p(x). \tag{5.96}$$

Nimensä mukaisesti integraaliulkomitta on aina vähintään yhtä tarkka kuin tavallinen ulkomitta, eli pätee $m^{**}_{p+q}(A) \le m^*_{p+q}(A)$. Vastaavasto integraalisisämittan on vähintään yhtä tarkka kuin tavallinen sisä, eli pätee $m_{**p+q}(A) \ge m_{*p+q}(A)$. (Tämä on edellinen Lemma.)

Ja nyt se yksinkertainen periaate johon Fubini perustuu: Jos *karkeammat* arviot yhtyvät, $m^*_{p+q}(A) = m_{p+q\ *}(A)$, niin toki silloin myös *tarkempien* arvioiden pitää yhtyä, $m^{**}_{p+q}(A) = m_{**p+q}(A)$. Tämä puolestaan tarkoittaa (yksityiskohdat lukijalle)

$$\overline{\int}_{\mathbb{R}^p} m^*_q(A_x)\ dm_p(x) = \underline{\int}_{\mathbb{R}^p} m_{*q}(A_x)\ dm_p(x).$$

Mutta koska pätee $m^*_q(A_x) \ge m_{*q}(A_x)$ kaikilla x, niin täytyy itseasiassa päteä yhtäsuuruus $m^*_q(A_x) = m_{*q}(A_x)$ melkein kaikkialla. Koska sisä- ja ulkoarviot yhtyvät näemme, jälleen, että A_x on mitallinen melkein kaikilla x. Tämä "ratkaisee" mitallisuuskysymyksen ja "todistaa" Fubinin.

Jatkopohdintaa: nyt kun meillä on uudet, entistä tarkemmat ylä ja ala-approksimaatiot, niin emmekö soveltaisi mittauksen filosofiaa niihin? Voisimme määritellä, että joukko A on mitallinen jos $m^{**}_{p+q}(A) = m_{p+q\,**}(A)$. Fubinin lause osoittaa, että näin saadaan ainakin yhtä paljon mitallisia joukkoja kuin Lebesgue mittateorialla. Itse asiassa sillä saadaan jopa enemmän, mutta hyvä kysymys kuuluu, missä mielessä moisia joukkoja kannattaa käyttää, mikäli ne eivät ole Lebesgue-mitallisia.

$\boxed{\text{LOPPU}}$

Alla luettelo (eräistä) kirjoista, joita voi käyttää lisämateriaalina. Parhaiten kurssin tarpeisiin ja filosofiaan soveltuva englannin kielinen kurssikirja on Taon *An introduction to measure theory.* (Se sopii myös kurssille Reaalianalyysi I).

Steinin ja Shakarchin *Real Analysis* on kaikin puolin todella hyvä.

[Bears] ja [Pugh] tarjoavat vaihtoehtoisia (ja lukijaystävällisiä) lähestymistapoja mitta ja integrointiteoriaan. [Bears] esimerkiksi määrittelee Lebesgue integraalin ylä- ja ala-summilla matkien Riemann-integraalia vähän niinkuin tässä materiaalissa tehdään. [Pugh] puolestaan *määrittelee* mitallisen funktion f sellaisena jonka graafijoukko $\mathcal{G}(f)$ on mitallinen ja sen integraalin Lauseen 2.6 pinta-ala-kaavalla.

References

[Tao] Terrence Tao, *An introduction to measure theory*, AMS, 2010.

[Stein] Elias Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis*, Princeton lect. in analysis III, 2005.

[Bears] Bears, *A Primer in Lebesgue integration*, Academic Press, 1997.

[Pugh] Charles Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer 2002.

[Bressoud] David Bressoud, *A Radical approach to Lebesgue integration, 2nd Ed.*, Cambridge Univ. Press, 2008.

[Wheeden] Richard Wheeden, *Measure and Integral*, Chapman & Hall, 2015.

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.