

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Mitta ja integraali, kesä 2016

Harjoitus 7

Palautus ti 21.6. klo 15.00 (Huom! Exactum sulkeutuu jo klo 15.)

Jos (ja kun) käytät jotain konvergenssilauseita näissä tehtävissä, niin muista perustella niiden käyttö!

1. Etsi $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$ ja $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$, kun:

(a)

$$a_k = \frac{1 + 2k \sin \frac{k\pi}{8}}{3 + 4k};$$

(b)

$$a_k = (-1)^k \frac{k^2 + 5k}{2k^2 - 4k}.$$

2. Olkoon $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava ja $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen jono mitallisia funktioita, että $f_j \geq 0$, $f_j \rightarrow f$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j \leq \int_j^{2j} g.$$

Osoita, että $f(x) = 0$ m.k.

(Vihje: Karakterisaatio raja-arvon olemassaololle, Fatoun lemma ja jokin konvergenssitulos.)

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + (-1/2)^k} dx.$$

4. Olkoon

$$f_n(x) = \frac{1 + e^{-n|x|}}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

5. Luentomonisteessa on todistettu Fatoun lemma joukoille (Lemma 3.48). Todista sama tulos käyttämättä monisteen todistusta (eli keksi toinen todistus).

Olkoon A_n , $n = 1, 2, \dots$ jono mitallisia joukkoja. Osoita

$$m\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

(Vihje: Mieti sopivia funktioita ja käytä Fatoun lemmaa.)

6. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava. Osoita, että funktio $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

on jatkuva.

(Vihje: jatkuvuus jonojen avulla ja jokin konvergenssilause.)