Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali, kesä 2016
Harjoitus 6
Palautus ma 13.6. klo 16.00

1. Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ reaalilukujonoja. Todista epäyhtälö

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n. \tag{1}$$

Anna esimerkki jonoista, joilla epäyhtälö on aito. (Älä etsi liian monimutkaista.)
(Vihje: Aloita osoittamalla $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$.)

2.
1. Määritellään funktiot $f_j\colon [0,1] \to [0,1]$ seuraavasti: $f_1 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_2 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_3 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_4 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_5 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_6 = \chi_{[3/4,1]}$, $f_7 = \chi_{[0;1/8]}, \ldots$. Määritä funktiot $\limsup_{j\to\infty} f_j$ ja $\liminf_{j\to\infty} f_j$.

3. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\, dx,$$

missä $0 < s < 1$.

4. ["Laskeva MKL (monotonisen konvergenssin lause)"]
Olkoot $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita siten, että $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$. Todista: Jos $\int_E f_1 < \infty$, niin

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

(Vihje: MKL.)

5. Olkoon $E_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia, erillisiä joukkoja ja $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\int_{\cup_j E_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f.$$

6. Olkoon $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A\colon\ \exists \lim_{j\to\infty} f_j(x)\}$ on mitallinen.
(Vihje: muista karakterisaatio raja-arvon olemassaololle.)