Mitta ja Integraali
Kesä 2016
4. tehtävät
Materiaalin sivut Epämitalliseen joukkoon asti. Palautus ma 6.6.2013 klo 18.00

Tehtävä 1 *Käyttäen tietoa, että on olemassa ei-mitallinen joukko. Osoita, että ulkomitta ei ole edes äärellis-täyadditiivinen, eli löytyy joukot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jotka ovat erillisiä, $A \cap B = \emptyset$, siten että*

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Tehtävä 2 *Harjoitusta sigma-algebran käsitteeseen:*
Olkoon X ylinumeroituva joukko. Määritellään
$\Gamma := \{E \subset X : E \text{ on numeroituva, tai } E^c \text{ on numeroituva}\}$. *Määritellään myös $\mu(E) := 0$ jos E on numeroituva ja $\mu(E) := \infty$ jos E^c on numeroituva. Osoita, että Γ on sigma-algebra ja μ on mitta.*

Tehtävä 3 *Tämä tehtävä esittelee eräät hyödylliset operaatiot joukko-jonoille. Palaamme niiden tulkintaan tehtävässä 5.*
Olkoon A_n avaruuden X osajoukko kaikilla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Tällöin muodostamme joukot

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k. \tag{1}$$

Etsi lim sup *ja* lim inf *tapauksissa*

1. $A_n = (a, b)$ *kun n on parillinen ja* $A_n = (c, d)$ *kun n on pariton ja* $a < b < c < d$.
2. $A_n = (-1/n, 1]$ *kun n on parillinen ja* $A_n = [-1, 1/n)$ *kun n on pariton.*

Tehtävä 4 *Osoita seuraavat relaatiot:*

1. $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$. *(Vihje: De Morgan.)*
2. $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Tehtävä 5 *Edellisen tehtävän joukoilla on yksinkertainen tulkinta, joka auttaa ymmärtämään, miksi ne voisivat olla käyttökelpoisia (katso seuraava tehtävä) Osoita nyt, jo mainitut, hyödylliset tulkinnat:*

1. $x \in \limsup_n A_n$ *jos ja vain jos "$x \in A_n$ äärettömän monella indeksillä n".*
2. $x \in \liminf_n A_n$ *jos ja vain jos "$x \in A_n$ jostakin $n = N$ lähtien (eli kun $n \geq N$)".*

(Vilkaise nyt huviksesi edellisiä esimerkkejä tämän uuden tulkinnan valossa.)

Tehtävä 6 *Todista monisteen Borel-Cantelli lemma (tärkeä TN-teoriassa): Olkoon* (X, Γ, μ) *mitta-avaruus ja* $A_n \in \Gamma$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Jos pätee*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty, \tag{2}$$

niin silloin

$$\mu(\limsup_n A_n) = 0. \tag{3}$$

Vihje:[1]

[1] Tämä tehtävä on helppo, älä yritä mitään monimutkaista. Käytä määritelmiä ja monotonisuutta.