Mitta ja Integraali
Kesä 2016
3. tehtävät

Nämä tehtävät koskevat materiaalin sivuja 29-37. Palautus ke 1.6 klo18.00.

Tehtävä 1 (Harjoitus Caratheodoryn ehdolle) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mielivaltainen joukko ja olkoot* E *ja* F *Lebesgue-mitallisia joukkoja. Osoita, että jos* E *ja* F *ovat* erillisiä, *eli* $E \cap F = \emptyset$, *niin pätee "täysadditiivisuus avaruudessa* A*":* [1]

$$m^*((E \cap A) \cup (F \cap A)) = m^*(E \cap A) + m^*(F \cap A).$$

[Tehtävän sanoma on, että vaikka joukkojen $(E \cap A)$ *ja* $(F \cap A)$ *ei tarvitse olla mitallisia, niin täysadditiivisuus pätee silti tässä erikoistilanteessa.]*

Tehtävä 2 (Lukutehtävä) *Lue monistetta ja etsi todistus tulokselle: Mikä tahansa avoin joukko* $G \subset \mathbb{R}^n$ *voidaan esittää* numeroituvana *yhdisteenä n-väleistä. Esitä todistus. [Saa kopioida materiaalia, saa lyhentää, oikoa, ja käyttää omia argumentteja.]*

Tehtävä 3 *Käyttäen edellistä tehtävää osoita, että avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.*

Kolmen seuraavan tehtävän tarkoituksena on opettaa miten sekä mitallisia, että ei-mitallisia joukkoja voidaan approksimoida avoimilla, suljetuilla tai mitallisilla joukoilla.

Tehtävä 4 *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Osoita, että kaikilla* $m \in \mathbb{N}$ *on olemassa avoin joukko* $B_m \subset \mathbb{R}^n$ *siten, että* $A \subset B_m$ *ja*

$$m(B_m) \leq m^*(A) + \frac{1}{m}.$$

Osoita nyt äskeistä tietoa apuna käyttäen, että on olemassa mitallinen joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ *siten, että*

$$A \subset B \quad \text{ja} \quad m(B) = m^*(A)$$

(Alkuosassa riittää tutkia ulkomitan ja Lebesguen peitteen määritelmää. Jälkiosassa otetaan numeroituva leikkaus...)

Tehtävä 5 *Olkoon* A *nyt mitallinen joukko ja lisäksi* $m(A) < \infty$. *Osoita tehtävää 4 apuna käyttäen, että kaikille* $\epsilon > 0$ *on olemassa avoin joukko* B *siten, että* $A \subset B$ *ja*

$$m(B \setminus A) < \epsilon.$$

Tehtävä 6 *Osoita tehtävä 5 ilman oletusta* $m(A) < \infty$.
Päättele tästä komplementeilla, että on olemassa myös suljettu joukko $C \subset A$ *siten, että* $m(A \setminus C) < \epsilon$.

[1] Vihje: Piirrä kuva, mieti Caratheodoryn ehdon tulkintaa, ja leikkaa sopivaa testijoukkoa mitallisella joukolla E (tai F).