Mitta ja Integraali
Kesä 2016
2. tehtävät

Nämä tehtävät koskevat materiaalin sivuja 18-28. Palautus ma 30.5 klo.16.00

Tehtävä 1 *Osoita kaksi erittäin hyödyllistä perusominaisuutta ulkomitalle (Näissä ei kannata käyttää ulkomitan määritelmää vaan materiaalin tuloksia):*

A) *Numeroituva yhdiste nollaulkomittaisia joukkoja on nollaulkomittainen: Eli jos* $m^*(A_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, *niin pätee* $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = 0$.

B) *Jos* $B \subset A$ *ja* $m^*(B) < \infty$, *niin pätee* $m^*(A \setminus B) \geq m^*(A) - m^*(B)$. *(Oletus* $m^*(B) < \infty$ *on tarpeellinen, jottei kävisi näin:* $\infty - \infty$. *Tee hyvin selväksi missä kohtaa todistusta käytät tätä oletusta.)*

Tehtävä 2 *Osoita, että seuraavien joukkojen* kolme*ulotteinen ulkomitta* m_3^* *on nolla.*

A) *Kiekko* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < R^2\}$

B) *Litteä taso* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

Tehtävä 3 (Ulkomitan translaatio-invarianssi) *Todista materiaalin Lauseen 1.11 ensimmäinen osa:*
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. *Silloin pätee* $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$.

Tehtävä 4 (Numeroituva joukko on nollamittainen) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *numeroituva. Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että sen* $m_n^*(A) = 0$. *(Vihje: Matki Esimerkin 1.5 Todistusta. Lisätieto: Tämän voi toki todistaa subadditiivisuudella ja tiedolla* $m_n^*(\{x\}) = 0$, *mutta nyt harjoitellaan määritelmän käyttöä.)*

Tehtävä 5 (Sisämitta) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mielivaltainen joukko. Osoita, että jos* $I \cap A = J \cap A$, *missä* I *ja* J *ovat n-välejä ja* $J \subset I$, *niin*
$\ell(I) - m^*(I \setminus A) = \ell(J) - m^*(J \setminus A)$.
[Näin ollen sisämitta on hyvin määritelty kaavalla
$m_*(I \cap A) = \ell(I) - m^*(I \setminus A)$.*]* [1]

Tehtävä 6 (Mitallisuusharjoitus) A) *Olkoon* $m^*(A) = 0$. *Osoita, että jokainen joukon* A *osajoukko* $B \subset A$ *on mitallinen.*

B) *Olkoon joukko* E *Lebesgue-mitallinen ja joukko* A *nollaulkomittainen,* $m^*(A) = 0$. *Osoita, että yhdiste* $E \cup A$ *on mitallinen.*

[1] Vihje: Esitä $I \setminus A = (I \setminus J) \cup (J \setminus A)$ ja huomaa, että n-välien erotus $I \setminus J$ voidaan esittää äärellisenä erillisenä yhdisteenä n-väleistä $\cup_{k=1}^{N} J_k$(ei tarvitse todistaa). Saa käyttää tietoa, että $m^*\big(B \cup \bigcup_k J_k\big) = m^*(B) + \sum_k m^*(J_k)$ kun joukko B ja n-välit J_k ovat *erillisiä*. Muista myös $\ell(I) = m^*(I)$.