Mitta ja Integraali
Kesä 2016
1. tehtävät
Palautus ke 25.5 klo.16.00

1. Mittateoriassa tutkitaan minkälaisille joukoille voidaan määrätä ”mitta”. Tämän vuoksi on välttämätöntä hallita joukko-operaatiota ja pientä manipulointia.
Sievennä seuraavat joukot käyttäen täsmällisiä argumentteja. Esimerkiksi yhdisteen $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ sivennetty muoto on $\mathbb{R}$, ja leikkauksen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,\infty)$ on $[0,\infty)$.

A $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\infty)$. (Tämä osoittaa, että joukkojen ääretön leikkaus voi olla tyhjä, vaikka jokainen äärellinen osaleikkaus olisi jopa ”äärettömän suuri”.)

B $\bigcup\{[q,p] : q,p\in\mathbb{Q}, a<q<p<b\}$, missä $a<b$ ovat annettuja reaalilukuja.

C $\bigcup\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}, (a,b)\subset U\}$, missä $U\subset\mathbb{R}$ on annettu avoin osajoukko.

D $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(n-\frac{1}{m}, n+\frac{1}{m})$.

2. Olkoon $U\subset\mathbb{R}$ ja $x\in R$. Luodaan erittäin kätevät määritelmät $U+x := \{y+x : y\in U\}$ ja $U+V := \bigcup_{x\in V}(U+x)$. Harjoittele tämän niin sanotun translaation käyttöä sieventämällä

A $[0,1]+(0,1)$

B $\mathbb{N}-\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}-n)$

C) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}+x)$

D $\bigcup_{x\in[0,1]}(\mathbb{Q}+x)$

3. Tämä tehtävä osoittaa, että kuvaus ei yleisesti ”kunnioita” leikkaus-operaatiota. Alkukuva sen sijaan kunnioittaa, mikä tekee siitä mukavamman operaation mitta-teorian näkökulmasta, koska se säilyttää tiettyjen joukkoperheiden (sigma-algebrojen) rakenteen. Tästä lisää kurssin kuluessa...
Olkoot X ja Y joukkoja, $f : X\to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_i\subset X,\ i\in I$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(V_i).$$

Osoita nyt, että inkluusio voi olla aito. (Tähän on kaksi lähestymistapaa. Joko lähteä etsimään yleistä, yksinkertaista ja murskaavaa vastaesimerkkiä, tai sitten valita äärimmäisen alkeellinen asetelma, kuten $X=Y=\{x,y\}$...)
Osoita myös, että jos f on injektio niin silloin pätee yhtäsuuruus

$$f\left(\bigcap_{i\in I}V_i\right)=\bigcap_{i\in I}f(V_i). \tag{1}$$

Sitten siirrytään numeroituvuuden harjoitteluun.

4. Todista:

A (1p) Jos A on numeroituva ja $B\subset A$, niin B on numeroituva.

B (1p) Potenssijoukko $P(\mathbb{R})$ on ylinumeroituva.

C (1p) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eli funktioiden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko, on ylinumeroituva.

D (1p) $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$ on numeroituva. (Induktio, tai vaihtoehtoisesti valitsemalla n kpl alkulukuja ja muodostamalla niillä injektio $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.)

D (1p) $\mathbb{N}$:n äärellisten osajoukkojen perhe on numeroituva.

E (2p) $\{(q,p) \subset \mathbb{R} : q, p \in \mathbb{Q}, q < p\}$on numeroituva. Tämä on hyvin tärkeä esimerkki koska kyseinen perhe muodostaa $\mathbb{R}$:n topologian kannan.

5. Tämä tehtävä kertoo jotakin tärkeää ”summien luonteesta”. Se myös selittää, miksi yleensä tutkitaan vain numeroituvia summia, eli indeksi joukoksi valitaan $\mathbb{N}$.
Olkoon I indeksijoukko (mahd. ylinumeroituva) ja $a_i \geq 0$ reaalilukuja. Osoita, että jos pätee

$$\sum_{i \in I} a_i < \infty, \tag{2}$$

niin silloin $\{i \in I : a_i > 0\}$ on numeroituva. Vihje: tutki joukkoja $\{i \in I : a_i > 1/n\}$.

6. Tutkitaan rationaalilukujen karakteristista funktiota välillä $[0,1]$: $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ jos $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ja $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ jos $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Osoita, että funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ jokaisen Riemann(-Darboux)-yläsumman arvo on 1, joten $\overline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, dx = 1$, ja jokaisen alasumma arvo on $\underline{\int_0^1} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, dx = 0$. Siispä määritelmän mukaan $\chi_{\mathbb{Q}}$ ei ole Riemann-integroituva.