

Pienryhmätehtävät 5

---

- (1) Ohjeet tulevat taululle, tutkitaan fraktaaleja!  
(2) Tutustu graafisesti (piirrä suorakulmio, ja piirrä tai leikkaa siitä osia) summaan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Miltä sarjan summa vaikuttaa?

- (3) Entä jos otetaan jokin vakio  $0 < c < 1$  ja tutkitaan sarjaa

$$1 + 1 \cdot c + 1 \cdot c^2 + 1 \cdot c^3 + \dots$$

Mieti taas geometrisesti, eli leikkaa tai piirrä suorakulmiosta osia.

(Äskeisessä tehtävässä oli  $c = \frac{1}{2}$ .)

- (4) Minkälainen sarja syntyy Akilleuksen ja kilpikunnan kilpajuoksusta, tarkemmin sanottuna, miten pitkälle Akilleus juoksee ennen kilpikunnan tavoittamista? (Akilleus juoksee ensin sekunnin, sitten kymmenesosasekuntia, jne.) Akilleus juoksee  $10 \frac{m}{s}$ , kilpikonna  $1 \frac{m}{s}$  ja etumatkaa kilpikonnalle annetaan  $10m$ .

Sarjan summaa voidaan lähestyä (esim) kahdella eri tavalla:

- (a) Mitä käy desimaalikehitelmille? Tuleeko rajalla joku reaaliluku? Milloin Akilleus saavuttaa kilpikunnan? (Muista miten desimaaliluvut joissa on toistuva osa muutettiin murtoluvuiksi.)  
(b) Hieman "abstraktimmin".  
Hieman kuten muutettiin desimaaliluvut joissa on toistuva osa murtoluvuiksi, voidaan muodostaa yhtälö summalle

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1},$$

missä  $a$  ja  $r$  ovat jotain lukuja (esim.  $a = 1$  ja  $r = 1/2$  aiemmassa tehtävässä.) Merkitään tätä summaa symbolilla  $S$  ja lasketaan seuraavasti.

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}, \\ rS &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n, \\ S - rS &= a - ar^n, \\ S(1 - r) &= a(1 - r^n), \\ S &= a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \end{aligned}$$

Huomaa, että jos  $0 < r < 1$ , niin termi  $r^n$  on **todella** pieni, kun  $n$  on iso. Täten, koska [Matematiikan perusopinnot 25op], niin voidaan sanoa että “rajana” saadaan

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a \frac{1}{1-r}.$$

Kokeile tätä kun  $a = 1$  ja  $r = 1/2$ .

Milloin Akilleus saavuttaa kilpikonnan?

(5) <sup>1</sup> Herra Thompsonilla on lamppu, jossa on on-off -kytkin. Hän kääntää lampun ensin päälle ja...

- odottaa sitten minuutin ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 30 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 15 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 7,5 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 3,75 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 1,875 sekuntia ja painaa kytkintä
- ...
- odottaa puolet aikaisemmasta odotusajasta ja painaa kytkintä
- ...

Kuten ollaan huomattu, niin kahden minuutin kuluttua homma on valmis. Onko lamppu silloin päällä vai ei? Entä jos herr Thompson aloittaa lampun ollessa pois päältä?

---

<sup>1</sup>Tämä on taas sellainen “huijaustehtävä” josta opet tykkää.