

Pienryhmätehtävät 1

- (1) Ota ryhmällesi käyttöön yksi iso jumppapallo sekä narua. Muodosta narusta silmukka, joka mahtuu juuri ja juuri pallon ympäri. Mikä on pallon ympärysmitta?

Lisää silmukkaan metrin verran narua. Mikäli narun nyt asettaa pallon ympärille ja yrittää pitää joka pisteen yhtä kaukana pallon pinnasta, niin miten kaukana naru pysyy?

Entä jos sama tehtäisiin maapallon pinnalla?

- (2) Otetaan korttipakka jossa on 52 korttia. Matematiikan ala nimeltään kombinatoriikka kertoo, että korttipakan kortit voi laittaa järjestykseen

$$52! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 52 \approx 8 \cdot 10^{67}$$

eri tavalla.

Mikäli maailmassa olisi ihmisiä 10 miljardia, eli 10^{10} kappaletta, ja he sekoittaisivat kukin korttipakkaa kerran sekunnissa ilman taukoja ja saisivat aikaan aina sellaisen sekoituksen mitä ei ole ennen nähty, miten monta vuotta heidän pitäisi sekoittaa pakkojaan jotta kaikki eri sekoitukset tulisi käytyä läpi?

(Yhdessä vuodessa on karkeasti sata miljoonaa sekuntia eli 10^8 sekuntia. Universumin ikä on noin 10 miljardia vuotta eli 10^{10} vuotta.)

Entä jos ihmisiä ei olisikaan vaan meidän tähtemme ympärillä? Havaitussa universumissa on noin 10 miljardia (10^{10}) galaksia. Oletetaan, että jokaisessa galaksissa on noin 100 miljardia (10^{11}) tähteä. Laitetaan jokaisen tähden ympärille 10 planeettaa, joissa kussakin kymmenen miljardia ihmistä sekoittaa korttipakkoja kerran sekunnissa. Monta vuotta nyt menee kaikkien sekoitusten läpikäyntiin?

- (3) Hilbertin hotelli – Herra Hilbertillä on isommanpuoleinen hotelli, jossa on peräti äärettömästi huoneita. Huoneet on onneksi numeroitu tuttuun tyyliin luonnollisilla luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 235346, 23547, 23548, \dots$$

Koska matkailu on muodissa, on herra Hilbertin hotelli tällä hetkellä täyteen buukattu. Mutta...

- (a) Hotellin aulaan saapuu herra Nolla, joka pyytää huonetta. Miten herra Hilbert saa hänet majoitettua?

- (b) Naapurihotellissa (joka on identtinen Hilbertin hotellin kanssa) tapahtuu vedenpaisumus, joten sen äärettömän monta asiakasta saapuvat herra Hilbertin hotellin ovelle. Miten herra Hilbert saa heidät majoitettua?
- (c) Lähistöllä on alkamassa kiinnostava konferenssi, ja pihaan ajaa ääretön määrä busseja, jotka on rekisterikilvissä numeroitu luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 23\ 546, 23\ 547, 23\ 548, \dots$$

Kussakin bussissa on numeroituvan äärettömästi matkustajia. Miten herra Hilbert majoittaa heidät kaikki jo täynnä olevaan hotelliinsa?

- (d) Herra Hilbertiä kiinnostaa, miten monella eri tavalla hänen hotellinsa huoneet voisivat olla varattuina. Hän ei kuitenkaan jaksa kirjoittaa äärettömän monta lappua, joten hän päättää pyytää, että jokainen hotellin asukas kirjoittaa hänelle yhden ”varausskenaarion”, eli tavan millä huoneet voisivat olla vapaina tai varattuina. Jotta kaikki tapahtuisi kontrolloidusti, kirjoitetaan nämä varausskenaariot paperille jonona ykkösiä ja nollia, jossa n :s ykkönen tai nolla kertoo, onko huone numero n varattu (1) vai vapaa (0). Voiko näin tulla kirjoitetuksi kaikki mahdolliset tavat varata huoneita?
- (4) Perinteinen matematiikan laitoksen fuksikysymys: Pitääkö yhtälö

$$0,9999999999999999 \dots = 1$$

paikkansa?

- (5) Tutkitaan kaikkia niitä lukuja, jotka voidaan esittää muodossa jossa nollaa seuraa pilkku ja sitten ykkösiä tai nollia; esimerkiksi

$$\begin{aligned} &0,001001 \\ &0,11111\dots \\ &0,101010101010 \\ &0,101010101010\dots \\ &0,0000000000\dots \\ &0,11011101111011110\dots \end{aligned}$$

Onko tätä muotoa olevien lukujen kokoelma numeroituva?

Oletetaan että on, ja laitetaan joukon luvut jonoon, täydentäen kaikki luvut joilla on äärellinen määrä ykkösiä ja nollia lisäämällä niiden loppuun loputtomasti nollia.

$$\begin{aligned} &0,001001000000\dots \\ &0,11111\dots \\ &0,10101010101000000000\dots \\ &0,101010101010\dots \\ &0,0000000000\dots \\ &0,11011101111011110\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Muodostetaan nyt uusi luku katsomalla mikä numero ensimmäisessä luvussa on ensimmäisellä desimaalipaikalla, toisella luvulla toisella desimaalipaikalla jne.

0,001001000000...
0,11111...
0,1010101010100000...
0,1010101010...
0,000000000...
0,1101110111011110...
⋮

Saadaan 0,011001... Vaihdetaan tässä luvussa desimaalipilkun jälkeiset ykköset nolliksi ja nollat ykkösiksi. Minne tämä uusi luku mahtuu listassa?