Heikki Junnila

KOMBINATORIIKKA

I

Joukoista ja relaatioista

0. Merkinnöistä.

Merkinnällä $a \in A$ tarkoitamme, että *a on joukon A alkio* eli *a kuuluu joukkoon* A. Jos a ei kuulu joukkoon A, niin merkitsemme $a \notin A$.

Joukko on alkioidensa muodostama kokonaisuus: $A = \{a : a \in A\}$; täten kaksi joukkoa A ja B ovat samat, $A = B$, jos ja vain jos A:lla ja B:llä on samat alkiot.

Tyhjä joukko on se joukko, jolla ei ole yhtään alkiota; tyhjästä joukosta käytämme merkintää $\emptyset$. *Yksiö* on sellainen joukko, jolla on täsmälleen yksi alkio, eli muotoa $\{a\}$ oleva joukko.

Jos A ja B ovat sellaisia joukkoja, että jokainen joukon B alkio on joukon A alkio, niin sanomme, että B on A:n *osajoukko* ja merkitsemme $B \subset A$ tai $A \supset B$. Jos on voimassa $B \subset A$ ja $B \neq A$, niin sanomme, että B on A:n *aito osajoukko* ja käytämme merkintää $B \subsetneqq A$.

Kahden joukon A ja B *yhdistysjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *yhdiste*) on joukko $A \cup B = \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$, siis niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joko joukkoon A tai joukkoon B (tai molempiin). Joukkojen A ja B *leikkausjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *leikkaus*) on joukko $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$, siis niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Joukkojen A ja B *erotusjoukko* (lyhyesti: A:n ja B:n *erotus*) on joukko $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$, siis niiden joukon A alkioiden joukko, jotka eivät kuulu joukkoon B (toisinaan puhumme myös *joukon B komplementista joukossa A*).

Näemme helposti seuraavien yhtälöiden olevan voimassa:

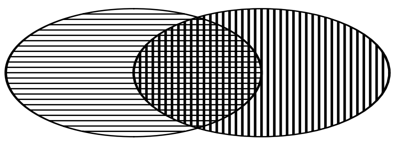
$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

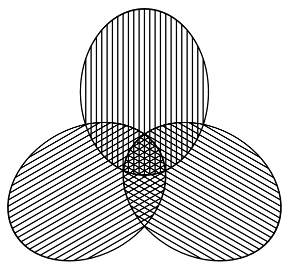
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad , \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad , \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Voimme kätevästi havainnollistaa edellisiä joukkoyhtälöitä ja muitakin kahden tai useamman joukon välisiä suhteita nk. *Vennin kaavioiden* avulla. Voimme esimerkiksi piirtää kahden joukon ja kolmen joukon tapauksiin liittyvät Vennin kaaviot seuraavan näköisiksi.





Jos $\mathcal{A}$ on *joukkoperhe*, eli sellainen joukko, jonka jokainen alkio on joukko, niin määrittelemme *perheen $\mathcal{A}$ yhdistyksen* ja *leikkauksen* kaavoilla

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : x \in A \text{ jollain } A \in \mathcal{A}\} \quad ; \quad \bigcap \mathcal{A} = \{x : x \in A \text{ jokaisella } A \in \mathcal{A}\}\,.$$

Jos I on jokin joukko ("indeksijoukko") ja A_i on jokin joukko jokaisella $i \in I$, niin määrittelemme *joukkojen* A_i, $i \in I$, *yhdistyksen* ja *leikkauksen* joukkoperheen $\{A_i : i \in I\}$ yhdistyksenä ja leikkauksena:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i : i \in I\} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i : i \in I\}\,.$$

Sanomme joukkojen A ja B olevan *(keskenään) erillisiä*, jos $A \cap B = \emptyset$ eli jos A:lla ja B:llä ei ole yhteisiä alkioita. Sanomme joukkojen A_i, $i \in I$, olevan *(keskenään) erillisiä*, jos A_i ja A_j ovat erillisiä aina kun $i \neq j$. Esimerkiksi kaksi eri yksiötä ovat aina keskenään erillisiä.

I 1. Relaatiot ja kuvaukset.

Alustava määritelmä: *Relaatio* on kahden (tai useamman, saman tai eri) joukon alkioiden välinen ominaisuus tai suhde.

Esimerkkejä Kokonaisluvut x ja y voivat olla keskenään mm. seuraavissa relaatioissa:

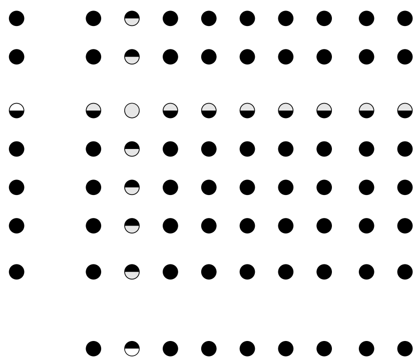
(a) $y \leq x$ (b) $y|x$ (“y jakaa x:n”) (c) syt(y, x)= 1 “y:llä ja x:llä ei ole yhteisiä tekijöitä” (d) $y = 2 + x$

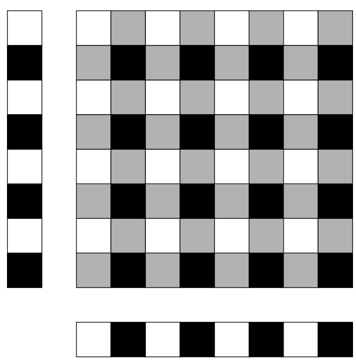
Matematiikassa voimme määritellä relaatiot (kuten useimmat muutkin käsitteet) joukkoina. Määrittelemme aluksi järjestetyn parin ja kahden joukon karteesisen tulon käsitteet.

I 1.1 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ merkitsemme (x, y):llä joukkoa $\{x, \{x, y\}\}$; tästä joukosta käytämme nimitystä x:n ja y:n *järjestetty pari.* Joukkojen X ja Y *karteesinen tulo* on joukko $\{(x, y) : x \in X$ ja $y \in Y\}$; tälle joukolle käytämme merkintää $X \times Y$.

Järjestettyjen parien olennainen ominaisuus on seuraava: jos (x, y) ja (a, b) ovat järjestettyjä pareja, niin $(x, y) = (a, b)$ jos ja vain jos $x = a$ ja $y = b$.

Voimme havainnollistaa karteesisia tuloja vaikkapa seuraavankaltaisilla kuvioilla:





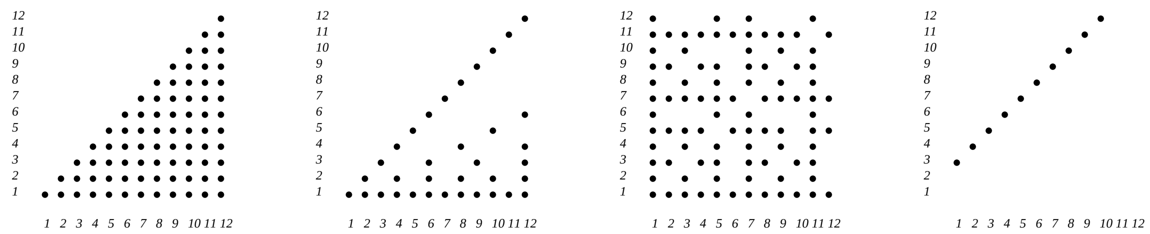
I 1.2 Määritelmä *Relaatio* on joukko, jonka jokainen alkio on järjestetty pari. Jos X ja Y ovat joukkoja ja $R \subset X \times Y$, niin R on *joukkojen X ja Y välinen relaatio.* Jos $R \subset X \times X$, niin sanomme myös, että R on *joukon X relaatio.*

Jokainen relaatio R on kahden joukon välinen relaatio: kun merkitsemme $(a,b)_1 = a$ ja $(a,b)_2 = b$ jokaisella $(a,b) \in R$, niin on voimassa $R \subset A \times B$, missä $A = \{(a,b)_1 : (a,b) \in R\}$ ja $B = \{(a,b)_2 : (a,b) \in R\}$.

Edellä määritellyt relaatiot ovat nk. *kaksipaikkaisia relaatioita.* Matematiikassa tarkastellaan toisinaan myös useampipaikkaisia relaatioita, mutta koska emme sellaisia seuraavassa tarvitse, määrittelemme relaatiot vain kaksipaikkaisina.

Esimerkkejä (a) Joukon $X \times X$ *lävistäjä* on relaatio $\Delta_X \subset X \times X$, missä $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$. Tämä on sama kuin identtisyysrelaatio X:ssä: $(x,z) \in \Delta_X \iff x = z$.

(b) Merkitään X:lla kokonaislukujen $1, 2, ..., 12$ muodostamaa joukkoa. Edellä mainitut kokonaislukujen väliset relaatiot (a) – (d) vastaavat seuraavia joukon $X \times X$ osajoukkoja:



$y \leq x$ $\qquad$ $y|x$ $\qquad$ $\mathrm{syt}(y,x) = 1$ $\qquad$ $y = 2 + x$

Kun R on X:n ja Y:n välinen relaatio ja $x \in X$, $y \in Y$, niin sanotaan, että x ja *y ovat relaatiossa R* jos (ja vain jos) $(x,y) \in R$. Usein merkintä $(x,y) \in R$ korvataan merkinnällä $y\,R\,x$.

Jokaisella $A \subset X$ merkitsemme

$$\boxed{R(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ siten, että } y\,R\,a\}}$$

Sanomme, että $R(A)$ on *joukon A kuva relaatiossa R.* Alkiolle $x \in X$ käytämme joukosta $R(\{x\})$ lyhennettyä merkintää $R\{x\}$; tällöin $R\{x\} = \{y \in Y : y\,R\,x\}$.

Yllä annettuja merkintöjä käyttäen on kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ voimassa

$$\boxed{(x,y) \in R \iff yRx \iff y \in R\{x\}}$$

Huomautus: Yhteys $(x,y) \in R \iff yRx$ on valitettavasti monissa tilanteissa nurinkurinen ja tästä syystä esimerkiksi yllä olevissa kuvissa kaksi vasemmanpuolista relaatiota on annettu "väärässä" järjestyksessä. Tämä nurinkurisuus periytyy vanhoista funktioihin liittyvistä merkinnöistä ja sopimuksista. On luontevaa samaistaa funktiot niiden "kuvaajien" kanssa ja tällöin xy-koordinaatiston perinteisen kuvan mukaisesti esim. $y = \sin(x) \iff (x,y) \in \sin$. Koska funktioita koskevia vanhoja merkintöjä ei kannata yrittää muuttaa ja koska haluamme esittää myös funktiot relaatioina, on meidän otettava myös yleisemmille relaatioille käyttöön kuvaajat, jotka valitettavan usein ovat "väärinpäin"; samasta syystä alla annettava relaatioiden "yhdistelemisen" määritelmä on epäluonnollinen joillekin yleisille relaatioille vaikka se kuvauksille antaakin "oikean" yhdistetyn kuvauksen määritelmän. Onneksi tästä kaikesta ei aiheudu niin paljon harmia kuin voisi kuvitella. Relaatioita ei nimittäin tarvitse käsitellä kuin muodollisesti karteesisten tulojen osajoukkoina, sillä relaatio $R \subset X \times Y$ on täysin määrätty kun joukot $R\{x\}$, $x \in X$, tunnetaan: R voidaan esittää muodossa $R = \bigcup_{x\in X}(\{x\} \times R\{x\})$. Seuraavassa ei relaatioita yleensä annetakaan karteesisten tulojen osajoukkoina vaan antamalla niihin liittyvät kuvajoukot. Lisäksi annamme myöhemmin äärellisille relaatioille havainnollisia ja "oikein päin olevia" esityksiä "suhteikkoina".

Jos R ja S ovat joukkojen X ja Y välisiä relaatioita, niin samoin ovat $R \cup S$, $R \cap S$ ja $(X \times Y) \smallsetminus R$. Määrittelemme eräitä muitakin operaatioita relaatioille.

I 1.3 Määritelmä Relaation $R \subset X \times Y$ *käänteisrelaatio* on se relaatio $R^{-1} \subset Y \times X$, joka määräytyy ehdosta

$$\boxed{xR^{-1}y \iff yRx}$$

Relaatioiden $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times V$ *yhdistelmä* on se relaatio $S \circ R \subset X \times V$, joka määräytyy ehdosta

$$\boxed{v\,S \circ R\,x \iff \exists \text{ sellainen } y \in Y \text{, että } v\,S\,y \text{ ja } y\,R\,x}$$

Näemme helposti, että jokaiselle relaatiolle R on voimassa $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$. Seuraava tulos osoittaa, miten yllä määritellyt operaatiot suhtautuvat toisiinsa.

I 1.4 Lause *Olkoot* $R \subset X \times Y$ *ja* $S \subset Y \times V$ *relaatioita. Tällöin*

$$\boxed{(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}}$$

Todistus. Kaikilla $x \in X$ ja $v \in V$ on voimassa

$$\begin{aligned} x\,(S \circ R)^{-1}\,v &\iff v\,(S \circ R)\,x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y, \text{ että } v\,S\,y \text{ ja } y\,R\,x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y, \text{ että } x\,R^{-1}\,y \text{ ja } y\,S^{-1}\,v \\ &\iff x\,(R^{-1} \circ S^{-1})\,v\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Näytämme, että relaatioiden yhdisteleminen on liitännäinen eli assosiatiivinen toimenpide; todistamme ensin seuraavan apulauseen.

I 1.5 Lemma *Olkoot* $R \subset X \times Y$ *ja* $S \subset Y \times V$ *relaatioita. Tällöin jokaisella* $A \subset X$ *on voimassa*

$$\boxed{(S \circ R)(A) = S\,(R(A))}$$

Todistus. Jokaisella $v \in V$ on voimassa

$$\begin{aligned} v \in (S \circ R)(A) &\iff \exists \text{ sellainen } a \in A, \text{ että } v\,(S \circ R)\,a \\ &\iff \exists \text{ sellainen } a \in A, \text{ että } \exists \text{ sellainen } y \in Y, \text{ että } v\,S\,y \text{ ja } y\,R\,a \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in Y, \text{ että } \exists \text{ sellainen } a \in A, \text{ että } y\,R\,a \text{ ja } v\,S\,y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } y \in R(A), \text{ että } v\,S\,y \\ &\iff v \in S\,(R(A))\,. \quad \square \end{aligned}$$

I 1.6 Lause *Olkoot* $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times V$ *ja* $T \subset V \times U$ *relaatioita. Tällöin*

$$\boxed{T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R}$$

Todistus. Lauseen yhtälö pätee, koska jokaisella $x \in X$ on Lemman I 1.5 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} (T \circ (S \circ R))\,\{x\} &= T\,((S \circ R)\,\{x\}) = T\,(S\,(R\{x\})) \\ &= (T \circ S)(R\{x\}) = ((T \circ S) \circ R)\,\{x\}. \quad \square \end{aligned}$$

Edellisen tuloksen nojalla voidaan merkitä $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R) = T \circ S \circ R$.

Kuvaukset esitetään relaatioiden avulla seuraavasti.

I 1.7 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Joukkojen X ja Y välinen relaatio $f \subset X \times Y$ on *kuvaus*, mikäli jokaisella $x \in X$, joukossa $f\{x\}$ on korkeintaan yksi alkio. Relaatio $f \subset X \times Y$ on *kuvaus joukolta* X *joukolle* Y, mikäli jokaisella $x \in X$ joukossa $f\{x\}$ on täsmälleen yksi alkio.

Mikäli relaatio f on kuvaus joukolta X joukolle Y, niin merkitsemme $f : X \to Y$; lisäksi määrittelemme jokaisella $x \in X$ joukon Y alkion $f(x)$ kaavan $\{f(x)\} = f\{x\}$ avulla. Panemme merkille, että kuvaus $f : X \to Y$ voidaan esittää muodossa $f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Jos f on kuvaus $X \to Y$, niin joukkoa X kutsutaan kuvauksen f *määritysjoukoksi* tai *lähtöjoukoksi* ja joukkoa Y kutsutaan f:n *maalijoukoksi*.

Lemman I 1.5 tuloksesta seuraa, että jos f on kuvaus $X \to Y$ ja g on kuvaus $Y \to V$, niin yllä määritelty relaatio $g \circ f$ on kuvaus $X \to V$ ja kyseessä on f:n ja g:n *yhdistetty kuvaus*: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jokaisella $x \in X$.

Panemme merkille, että kuvauksille $f : X \to Y$ ja $g : Z \to V$ on voimassa $f \subset g$ jos ja vain jos $X \subset Z$ ja $f(x) = g(x)$ jokaisella $x \in X$. Jos on voimassa $f \subset g$, niin tällöin sanotaan, että g on kuvauksen f *jatke* ja f on kuvauksen g *rajoittuma*.

Olkoon f kuvaus $X \to Y$ ja olkoon A joukon X osajoukko. Kuvauksen f *rajoittuma joukkoon* A on relaatio $f \cap (A \times Y)$; tätä relaatiota merkitään symbolilla $f|A$. Selvästi $f|A$ on kuvaus $A \to Y$. Lisäksi on voimassa $f = (f|A) \cup (f|X \setminus A)$.

Määrittelemme eräitä tärkeitä kuvausten ominaisuuksia.

I 1.8 Määritelmä Olkoot X ja Y joukkoja. Kuvaus $f : X \to Y$ on

(i) *injektio*, mikäli kaikilla $x, z \in X$ ehdosta $f(x) = f(z)$ seuraa, että $x = z$.

(ii) *surjektio*, mikäli jokaisella $y \in Y$ on olemassa sellainen $x \in X$, että $f(x) = y$.

(iii) *bijektio*, mikäli f on sekä injektio että surjektio.

Määritelmän nojalla kuvaus $f : X \to Y$ on injektio jos ja vain jos f on bijektio $X \to f(X)$. Injektioita voidaan myös luonnehtia seuraavasti.

I 1.9 Lause *Kuvaus $f : X \to Y$ on injektio jos ja vain jos f:n käänteisrelaatio f^{-1} on kuvaus $f(X) \to X$.*

Todistus. Koska $f \subset X \times Y$, on voimassa $f \subset X \times f(X)$ ja täten edelleen $f^{-1} \subset f(X) \times X$. Näin ollen f^{-1} on kuvaus $f(X) \to X$, jos ja vain jos jokaisella $y \in f(X)$ joukossa $f^{-1}\{y\}$ on täsmälleen yksi alkio. Täten on voimassa:

$$\begin{aligned} f \text{ on injektio } &\iff x \neq z \implies f(x) \neq f(z) \\ &\iff \forall y \in f(X)\ \exists \text{ täsmälleen yksi sellainen } x \in X, \text{ että } f(x) = y \\ &\iff \forall y \in f(X) \text{ joukossa } f^{-1}\{y\} \text{ on täsmälleen yksi alkio} \\ &\iff f^{-1} \text{ on kuvaus } f(X) \to X. \qquad \square \end{aligned}$$

I 1.10 Korollaari *Kuvaus $f : X \to Y$ on bijektio jos ja vain jos f:n käänteisrelaatio f^{-1} on kuvaus $Y \to X$.*

Todistus. *Välttämättömyys. Jos f on bijektio, niin $f(X) = Y$ ja relaatio f^{-1} on Lauseen I 1.9 nojalla kuvaus $Y \to X$.*

Riittävyys. Oletamme, että relaatio f^{-1} on kuvaus $Y \to X$. Tällöin kuvaus f on Lauseen I 1.9 nojalla injektio. Lisäksi kuvaus f on surjektio, sillä jos y on Y:n alkio, niin voimme merkitä $x = f^{-1}(y)$, jolloin on voimassa $x \in X$ ja $x\, f^{-1}\, y$ eli $y\, f\, x$ eli $y = f(x)$. $\square$

Seuraavan tuloksen avulla nähdään, että bijektion käänteisrelaatio on bijektion *käänteiskuvaus.*

I 1.11 Lemma *Olkoon f surjektio $X \to Y$. Tällöin $f \circ f^{-1} = \Delta_Y$.*

Todistus. Koska f on kuvaus, niin jokaisella $x \in X$ on olemassa korkeintaan yksi sellainen $y \in Y$, että $y\, f\, x$. Koska f on surjektio, niin jokaisella $y \in Y$ on olemassa sellainen $x \in X$, että $y\, f\, x$; tästä seuraa, että kaikilla $y, u \in Y$ on voimassa

$$\begin{aligned} u\,(f \circ f^{-1})\,y &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u\, f\, x \text{ ja } x\, f^{-1}\, y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u\, f\, x \text{ ja } y\, f\, x \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x \in X, \text{ että } u = f(x) \text{ ja } y = f(x) \\ &\iff y = u \\ &\iff u\, \Delta_Y\, y \quad . \qquad \square \end{aligned}$$

Joukon Y identtisyysrelaatio Δ_Y on kuvaus $Y \to Y$ ja sitä kutsutaan myös joukon Y *identtiseksi kuvaukseksi.* Jos nyt g on bijektio $X \to Y$, niin tällöin g on surjektio $X \to Y$ ja g^{-1} on surjektio $Y \to X$, joten Lemman I 1.11 tuloksesta seuraa, että $g \circ g^{-1} = \Delta_Y$ ja $g^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = \Delta_X$; koska $(g^{-1})^{-1} = g$, edellisestä seuraa, että $g^{-1} \circ g$ on X:n ja $g \circ g^{-1}$ on Y:n identtinen kuvaus eli että g ja g^{-1} ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Osoitamme lopuksi, että yllä tarkastellut kuvausten ominaisuudet säilyvät kuvauksia yhdistettäessä.

I 1.12 Lause *Olkoon f kuvaus $X \to Y$ ja olkoon g kuvaus $Y \to Z$. Jos f ja g ovat bijektioita (injektioita, surjektioita), niin tällöin kuvaus $g \circ f$ on bijektio (injektio, surjektio).*

Todistus. Oletetaan, että f ja g ovat surjektioita. Tällöin on voimassa $f(X) = Y$ ja $g(Y) = Z$. Lemman I 1.5 nojalla on voimassa $(g \circ f)(X) = g\left(f(X)\right) = g(Y) = Z$; täten kuvaus $g \circ f$ on surjektio.

Oletetaan, että f ja g ovat injektioita. Osoitetaan, että yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on injektio. Olkoon joukon X alkioille x ja z voimassa $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(z)$ eli $g\left(f(x)\right) = g\left(f(z)\right)$. Koska g on injektio, niin on voimassa $f(x) = f(z)$; tästä puolestaan seuraa, koska myös f on injektio, että $x = z$. Olemme osoittaneet, että $g \circ f$ on injektio.

Jos f ja g ovat bijektioita, niin edellä esitetystä seuraa, että kuvaus $g \circ f$ on sekä surjektio että injektio ja näin ollen se on bijektio. $\square$

Kuvaukset määräytyvät usein jonkun säännön nojalla, joka määrää kuva–alkion kuvattavan alkion avulla. Esityksen yksinkertaistamiseksi jätämme seuraavassa usein kuvauksen nimeämättä ja viittaamme siihen esittämällä sen säännön, josta kuvaus määräytyy. Voimme esimerkiksi puhua luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ määritellystä kuvauksesta $n \mapsto n+1$ kun tarkoitamme sitä kuvausta $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $f(n) = n+1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

I 2. Luonnolliset luvut. Äärelliset joukot.

Kombinatoriikassa tärkein joukko on $\mathbb{N}$, luonnollisten lukujen $0, 1, 2, 3, ...$ muodostama joukko. Tämä johtuu siitä, että kombinatoriikassa ratkotaan lukumääriin liittyviä ongelmia ja lukumääriä ilmaistaan luonnollisten lukujen avulla. Esimerkiksi joukon $\{a, b, c\}$ alkioiden lukumäärä on 3, sen kaikkien osajoukkojen lukumäärä on 8, parillisalkioisten osajoukkojen lukumäärä on 4, kaikkien kuvausten $\{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ lukumäärä on 27, jne.

Merkitsemme symbolilla $\mathbb{N}^*$ “varsinaisten luonnollisten lukujen” joukkoa $\{1, 2, 3, ...\}$.

Oletamme seuraavassa luonnollisten lukujen perusominaisuudet tunnetuiksi. Muistutamme tässä vain, että joukossa on määritelty alkioiden välinen järjestys $\leq$ sekä laskutoimitukset $+$ (yhteenlasku) ja $\cdot$ (kertolasku). Näiden välillä on paljon yhteyksiä. Esimerkiksi järjestys voidaan palauttaa yhteenlaskuun, sillä $n \leq k$ jos ja vain jos on olemassa sellainen sellainen ℓ, että $k = n + \ell$. Yhteen- ja kertolaskun välillä pätee mm. yhtälö $(n + k) \cdot \ell = n \cdot \ell + k \cdot \ell$.

Palautamme mieliin järjestyksen eli järjestysrelaation määritelmän.

I 2.1 Määritelmä Joukon X relaatio $\preceq$ on X:n *osittainen järjestys*, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) Jokaisella $x \in X$ on voimassa $x \preceq x$. *Refleksiivisyys*

(ii) Kaikilla $x, y \in X$, jos $x \preceq y$ ja $y \preceq x$, niin $x = y$. *Antisymmetrisyys*

(iii) Kaikilla $x, y, z \in X$, jos $x \preceq y$ ja $y \preceq z$, niin $x \preceq z$. *Transitiivisuus*

Relaatio $\preceq$ on X:n *järjestys*, jos $\preceq$ on osittainen järjestys ja seuraava ehto toteutuu:

(iv) Kaikilla $x, y \in X$ on voimassa joko $x \preceq y$ tai $y \preceq x$. *Vertailtavuus*

Jos $\preceq$ on joukon X (osittainen) järjestys, niin sanomme, että pari $(X, \preceq)$ on *(osittain) järjestetty joukko.*

Otamme vielä käyttöön seuraavat nimitykset ja merkinnät (osittain) järjestetyn joukon $(X, \preceq)$ yhteydessä. Jos X:n alkioille x ja y on voimassa $x \preceq y$, niin sanomme, että x on *pienempi tai yhtäsuuri* kuin y tai että y on *suurempi tai yhtäsuuri* kuin x.

Joukon X järjestykseen $\preceq$ liittyy vastaava “tiukka järjestys” $\prec$. Jos alkioille $x, y \in X$ on voimassa $x \preceq y$ ja $x \neq y$, niin merkitsemme $x \prec y$ ja sanomme, että x on *pienempi* kuin y tai että y on *suurempi* kuin x.

Olkoon $\preceq$ joukon X (osittainen) järjestys. Näemme helposti, että myös relaation $\preceq$ käänteisrelaatio $\preceq^{-1}$ on X:n (osittainen) järjestys. Merkitsemme tässä yhteydessä yleensä relaatiota $\preceq^{-1}$ “käännetyllä” symbolilla $\succeq$. Tällöin siis $x \succeq y$ jos ja vain jos $y \preceq x$. Vastaavasti merkitsemme usein $x \succ y$ kun $y \prec x$.

Olkoon $(X, \preceq)$ järjestetty joukko. Joukon X osajoukon A *pienin alkio* on sellainen A:n alkio p, että jokaisella $a \in A$ on voimassa $p \preceq a$. Jos pienin alkio on olemassa, niin se on yksikäsitteinen ja käytämme sille merkintää $\min A$. Osajoukon A *suurin alkio* on sellainen A:n alkio s, että jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \preceq s$.

Jos suurin alkio on olemassa, niin se on yksikäsitteinen ja käytämme sille merkintää $\max A$.

Palaamme nyt tarkastelemaan luonnollisia lukuja. Seuraavassa käsittelemme joukkoa $\mathbb{N}$ aina järjestettynä joukkona $(\mathbb{N}, \leq)$, vaikkemme merkitsekään järjestystä $\leq$ näkyviin.

Oletimme luonnollisten lukujen perusominaisuudet tunnetuiksi, mutta palautamme kuitenkin mieliin tärkeän ja keskeisen "induktioperiaatteen". Luonnollisten lukujen joukon aksiomaattisissa määrittelyissä (esimerkiksi nk. Peanon aksiomien avulla) otetaan induktioperiaate mukaan muodossa tai toisessa. Tässä lähdemme liikkeelle seuraavasta muotoilusta.

Induktioaksioma Jokaisessa luonnollisten lukujen joukon epätyhjässä osajoukossa on pienin luku.

Esimerkiksi, joukon $\mathbb{N}$ pienin luku on 0, joukon $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ pienin luku on 1, joukon $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pienin luku on 2, jne.

Joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta lukua, sillä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $n + 1 \in \mathbb{N}$ ja $n < n + 1$. Luonnehdimme seuraavaksi niitä $\mathbb{N}$:n epätyhjiä osajoukkoja, joissa on suurin luku.

Sanomme, että joukko $A \subset \mathbb{N}$ on *rajoitettu*, mikäli joukolla A on *yläraja* eli sellainen $y \in \mathbb{N}$, että jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \leq y$.

Jos joukossa $A \subset \mathbb{N}$ on suurin luku, niin A on selvästikin rajoitettu. Osoitamme induktioaksioman avulla, että myös käänteinen tulos pätee epätyhjille joukoille.

I 2.2 Lause *Jokaisessa $\mathbb{N}$:n epätyhjässä rajoitetussa osajoukossa on suurin luku.*

Todistus. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{N}$ epätyhjä ja rajoitettu. Tällöin joukko $Y = \{y \in \mathbb{N} : y \text{ on joukon } A \text{ yläraja}\}$ on epätyhjä. Merkitsemme $z = \min Y$. Näytämme, että $z \in A$. Teemme vastaväitteen: $z \notin A$. Tällöin jokaisella $a \in A$ on voimassa $a < z$; tästä seuraa, koska $A \neq \emptyset$, että $z \neq 0$. Nyt on voimassa $z - 1 \in \mathbb{N}$ ja $z - 1 < z$. Luvun z minimaalisuudesta seuraa, että $z - 1 \notin Y$. Tämä on ristiriita, sillä $z - 1$ on joukon A yläraja: jokaisella $a \in A$ on voimassa $a < z$ ja siten $a \leq z - 1$. Vastaväite on edellisen nojalla väärä. Näin ollen $z \in A$; koska z on A:n yläraja, on voimassa $z = \max A$. $\square$

Induktioaksioman avulla voimme helposti todistaa tutun induktioperiaatteen.

Olkoon P luonnollisten lukujen ominaisuus ja n luonnollinen luku. Otamme käyttöön merkinnän $P(n)$ osoittamaan, että luvulla n on ominaisuus P ja merkitsemme $\neg P(n)$ silloin kun n:llä ei ole ominaisuutta P. alla oleva tulos, jota seuraavassa kutsutaan induktioperiaatteeksi.

I 2.3 Korollaari *(Induktioperiaate) Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että on voimassa:*
1^o $P(0)$.
2^o $(\forall n \in \mathbb{N})\,(P(n) \Rightarrow P(n+1))$.
Tällöin on voimassa $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$.

Todistus. Merkitsemme $B = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$. On osoitettava, että $B = \emptyset$. Teemme vastaväitteen: $B \neq \emptyset$. Merkitsemme $a = \min B$. Ehdon 1^o nojalla on voimassa $P(0)$ eli $0 \notin B$. Täten $a > 0$. Luvun a minimaalisuuden nojalla pätee, että $a - 1 \notin B$ eli $P(a-1)$. Ehdosta 2^o seuraa yhtälön $(a-1)+1 = a$ nojalla, että $P(a)$; tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $a \in B$. Koska vastaväite johti ristiriitaan, se on väärä. Näin ollen on voimassa $B = \emptyset$. □

"*Todistus induktiolla n:n suhteen*" suoritetaan seuraavasti:
1^o Todistetaan (tai todetaan), että luvulla 0 on ominaisuus P.
2^o Mielivaltaiselle $n \in \mathbb{N}$ oletetaan, että luvulla n on ominaisuus P ("*Induktio–oletus*") ja todistetaan tämän oletuksen avulla, että luvulla $n+1$ on ominaisuus P. ("*Induktioaskel*").
3^o Johtopäätöksenä (induktioperiaatteen nojalla) on, että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus P.

Induktioperiaatteella on monia muunnelmia, joita voi käyttää tilanteesta riippuen. Monisteen "Johdatus diskreettiin matematiikkaan" luvussa III.1 annetaan esimerkkejä induktioperiaatteen eri muodoista ja niiden käytöstä. Monisteen luvussa III.2 perustellaan induktion avulla rekursiivisten määritelmien pätevyyttä. Voimme esimerkiksi määritellä järjestetyttejen parien yleistyksinä *n-jonot* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ rekursiivisesti asettamalla $() = \emptyset$ (0-*jono*) ja $(x) = x$ (1-*jono*) ja käyttämällä palautuskaavaa $(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = \big((x_1, x_2, ..., x_k), x_{k+1}\big)$.

Myös äärellisten joukkojen perusominaisuuksien suhteen viittaamme monisteeseen "Johdatus diskreettiin matematiikkaan", jonka luvussa II.4 käsitellään joukkojen äärellisyyttä. Merkintöjen vakiinnuttamiseksi kertaamme hieman monisteen määritelmiä ja tuloksia.

Määrittelemme joukkojen äärellisyyden luonnollisten lukujen avulla. Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukkoa $\{k \in \mathbb{N}^* : k \leq n\} = \{1, ..., n\}$ symbolilla $[n]$. Panemme merkille, että $[0] = \emptyset$.

I 2.4 Määritelmä Joukko X on *äärellinen*, mikäli jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $[n] \to X$. Jos X ei ole äärellinen, niin sanomme, että X on *ääretön*.

Koska bijektion käänteiskuvaus on bijektio, joukko X on äärellinen jos ja vain jos jollain $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $X \to [n]$. Koska kahden bijektion yhdistetty kuvaus on bijektio, näemme että joukko on äärellinen, mikäli se on jonkun äärellisen joukon kuva bijektiivisessä kuvauksessa.

Antamamme määritelmän nojalla tyhjä joukko on äärellinen, sillä $[0] = \emptyset$ ja tyhjä joukko on bijektio tyhjältä joukolta tyhjälle joukolle. Myös jokainen yksiö $\{a\}$ on äärellinen, sillä ehto $1 \mapsto a$ määrittelee bijektion $[1] \to \{a\}$.

Voimme luonnehtia joukon äärellisyyttä havainnollisesti jonojen avulla.

Jono $(x_1, ..., x_n)$ on *yksinkertainen*, mikäli $x_i \neq x_j$ aina kun $i \neq j$. Luvun n arvoilla 0 ja 1 saatavat "triviaalit" jonot $(x_1, ..., x_0) = ()$ ja $(x_1, ..., x_1) = (x_1)$ ovat aina yksinkertaisia, mutta esimerkiksi jono $(1, 1)$ ei ole yksinkertainen. Joukon X *yksinkertainen esitys* on sellainen joukon X esitys $X = \{x_1, ..., x_n\}$, että jono $(x_1, ..., x_n)$ on yksinkertainen.

Jonot vastaavat kuvauksia seuraavasti: jonoa $(x_1, .., x_n)$ vastaa kuvaus $i \mapsto x_i$ joukolta $[n]$ joukolle $\{x_1, ..., x_n\}$ ja kääntäen, kuvausta f joukolta $[n]$ vastaa jono $(f(1), ..., f(n))$. Tässä vastaavuudessa yksinkertaiset jonot ja bijektiiviset kuvaukset vastaavat toisiaan. Täten joukko X on äärellinen jos ja vain jos sillä on yksinkertainen esitys.

Kertaamme nyt eräitä äärellisten joukkojen perusominaisuuksia, joita johdettiin monisteen "Johdatus diskreettiin matematiikkaan" luvussa I.4 induktioperiaatteen avulla.

I 2.5 Lause *Olkoon A äärellinen joukko. Tällöin vain yhdellä $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $[n] \to A$.*

Olkoon A äärellinen joukko. Käytämme edellisen lauseen yksikäsitteiseksi todistamasta luvusta n merkintää $|A|$ (“A:n *alkioiden lukumäärä*” tai “A:n *koko*”). Kun $|A| = n > 0$, niin voimme esittää joukon A muodossa $A = \{a_1, ..., a_n\}$: asetamme $a_i = \varphi(i)$ jokaisella $i \in [n]$, kun φ on bijektio $[n] \to A$.

Kun A on äärellinen joukko ja $|A| = n$, niin sanomme, että A on *n-joukko* tai *n-alkioinen joukko.* Käytämme seuraavassa sekä merkintää “$|B| = n$” että sanontoja “B on n–joukko” ja “B on n-alkioinen joukko” lyhennyksenä ilmaisulle “B on äärellinen joukko ja n on luonnollinen luku, jolle on voimassa $|B| = n$”.

Tyhjä joukko on ainoa 0–joukko. Yksiö on sama asia kuin 1-joukko. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $|[n]| = n$, koska joukon identtinen kuvaus on aina bijektio joukolta itselleen.

Huomautus Kun myöhemmin puhumme (ilman eri määritelmää) “n-osajoukoista”, “n-osituksista”, “n-renkaista”, jne., tarkoitamme samaa kuin edellä: B on n-osajoukko (n-ositus, n-rengas, jne.), mikäli B on osajoukko (ositus, rengas, jne.) ja $|B| = n$.

Joukkojen välinen bijektio “säilyttää” joukkojen äärellisyyden ja niiden koon.

I 2.6 Lause *Olkoot A ja B sellaisia joukkoja, että on olemassa bijektio $A \to B$. Jos joko A tai B on äärellinen, niin tällöin sekä A että B ovat äärellisiä ja on voimassa $|A| = |B|$.*

I 2.7 Lause *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon B A:n aito osajoukko. Tällöin B on äärellinen ja $|B| < |A|$.*

Edellisten tulosten avulla voidaan luonnehtia $\mathbb{N}$:n osajoukkojen äärellisyyttä.

I 2.8 Lemma *Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ epätyhjä äärellinen joukko, $|A| = m$. Tällöin joukolla A on sellainen esitys $A = \{a_i : i \in [m]\}$, että jokaisella $i \in [m-1]$ on voimassa $a_i < a_{i+1}$.*

I 2.9 Lause *Joukon $\mathbb{N}$ osajoukko on äärellinen jos ja vain jos osajoukko on rajoitettu.*

Lauseiden I 2.2 ja I 2.9 nojalla pätee, että joukko $A \subset \mathbb{N}$ on äärellinen jos ja vain jos joukossa A on suurin luku.

Lauseesta I 2.9 seuraa erityisesti, että joukko $\mathbb{N}$ on ääretön.

I 2.10 Lause *Äärellisen monen äärellisen joukon muodostama yhdistysjoukko on äärellinen.*

Yleisen summamerkinnän avulla voimme ilmaista äärellisen monen erillisen äärellisen joukon yhdisteen alkioiden lukumäärän.

I 2.11 Lause *Olkoon I äärellinen joukko ja olkoot A_i, $i \in I$, keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja. Tällöin*

$$\boxed{\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{i\in I} |A_i|}$$

Merkinnällä $\sum_{i\in I} k$ tarkoitamme seuraavassa summaa $\sum_{i\in I} k_i$, missä $k_i = k$ jokaisella $i \in I$. Koska voimme esittää äärellisen joukon A keskenään erillisten joukkojen $\{a\}$, $a \in A$, yhdisteenä ja koska $|\{a\}| = 1$ jokaisella $a \in A$, niin voimme ilmaista A:n koon tämän merkinnän mukaisesti seuraavasti:

I 2.12 Korollaari *Äärelliselle joukolle A on voimassa*

$$\boxed{|A| = \sum_{a\in A} 1}$$

Yllä olevan yhtälön oikeanpuoleinen lauseke vastaa intuitiivista ajatusta siitä, että joukon koko saadaan "laskemalla" joukon alkioiden lukumäärä.

Kahden erillisen joukon tapauksessa voimme ilmaista edellisen lauseen tuloksen seuraavasti.

I 2.13 Korollaari *Kun A ja B ovat keskenään erillisiä äärellisiä joukkoja, niin $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

I 2.14 Korollaari *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon B A:n osajoukko. Tällöin $|A \setminus B| = |A| - |B|$.*

Todistus. Joukot B ja $A \setminus B$ ovat Lauseen I 2.7 nojalla äärellisiä. Koska $B \cup (A \setminus B) = A$ ja $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, on edellisen korollaarin nojalla voimassa $|B| + |A \setminus B| = |A|$. Näin ollen $|A \setminus B| = |A| - |B|$. □

Korollaarin I 2.14 tuloksesta seuraa muun muassa, että kun H on äärellinen joukko ja $h \in H$, niin $|H \setminus \{h\}| = |H| - 1$.

Myös seuraava tulos seuraa Lauseesta I 2.11.

I 2.15 Korollaari *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja ja olkoon f kuvaus $X \to Y$. Tällöin $|X| = \sum_{y\in Y} \left|f^{-1}\{y\}\right|$.*

I 2.16 Lause *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin karteesinen tulo $A \times B$ on äärellinen joukko ja sille on voimassa*

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B|}$$

I 3. Joukon ositukset. Ekvivalenssirelaatiot.

Kutsumme usein *(joukko)perheeksi* sellaista joukkoa, jonka alkiotkin ovat joukkoja. Perheen alkioiden asemesta puhumme *perheen joukoista*. Jos perheen joukot ovat jonkun annetun joukon ("perusjoukon") A osajoukkoja, niin puhumme A:n *osajoukkoperheistä*. Joukon A osajoukkoperheistä suurin on A:n kaikkien osajoukkojen muodostama joukko $\{B : B \subset A\}$; tätä joukkoperhettä kutsutaan usein *joukon A potenssijoukoksi* ja siitä käytetään merkintää $\mathcal{P}(A)$. Esimerkiksi $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\{a,b\},\{a\},\{b\},\emptyset\}$. Joukon A osajoukkoperheet ovat täten perheen $\mathcal{P}(A)$ osaperheitä. Joukkoperheitä merkitään yleensä symbolein $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. Joukkoperheen $\mathcal{B}$ leikkaus ja yhdiste määriteltiin edellä kaavoilla $\bigcap\mathcal{B} = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ ja $\bigcup\mathcal{B} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. Tehdään vielä seuraavat sopimukset: jos $\mathcal{B}$ on tyhjä perhe A:n osajoukkoja (eli $\mathcal{B} = \emptyset$), niin $\bigcap\mathcal{B} = A$ ja $\bigcup\mathcal{B} = \emptyset$ (motivaatio: $\bigcap\emptyset = \{a \in A : a \in B$ jokaisella $B \in \emptyset\} = A$ ja $\bigcup\emptyset = \{a \in A : \exists B \in \emptyset$ siten, että $a \in B\} = \emptyset$).

I 3.1 Määritelmä Olkoon A joukko ja olkoon $\mathcal{B}$ joukkoperhe.
Perhe $\mathcal{B}$ on joukon A *peite*, mikäli on voimassa $\bigcup\mathcal{B} = A$.
Perhe $\mathcal{B}$ on *erillinen*, jos kaikki $\mathcal{B}$:n eri joukot ovat keskenään erillisiä.
Perhe $\mathcal{B}$ on A:n *ositus*, mikäli $\mathcal{B}$ on epätyhjistä joukoista koostuva A:n erillinen peite.

Huomattakoon, että joukon A epätyhjien osajoukkojen muodostama perhe $\mathcal{B}$ on A:n ositus jos ja vain jos jokainen A:n alkio kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{B}$ joukkoon.

I 3.2 Esimerkkejä epätyhjän joukon A osituksista:

(a) $\mathcal{B} = \{A\}$.

(b) $\mathcal{B} = \{\{a\} : a \in A\}$.

(c) $\mathcal{B} = \{B, A \setminus B\}$ kun $\emptyset \neq B \subsetneq A$.

(d) $\mathcal{B} = \{B \setminus C, C \setminus B, B \cap C, A \setminus (B \cup C)\} \setminus \{\emptyset\}$ kun $B, C \subset A$.

Yllä olevassa esimerkissä (d) voimme esittää joukon A osajoukot B ja C yhdistyksinä esimerkissä muodostetun osituksen $\mathcal{B}$ joukoista: $B = (B \setminus C) \cup (B \cap C)$ ja $C = (C \setminus B) \cup (B \cap C)$. Seuraavassa lauseessa konstruoimme "pienimmän" sellaisen osituksen, jonka joukkojen yhdistyksinä voimme esittää kaikki annetun osajoukkoperheen joukot.

I 3.3 Lause *Olkoon $\mathcal{B}$ joukon A osajoukkoperhe. Merkitään*

$$X_{\mathcal{C}} = \bigcap \mathcal{C} \setminus \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}) \qquad \text{jokaisella } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}.$$

Tällöin perhe $\mathcal{X} = \{X_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\} \setminus \{\emptyset\}$ on A:n ositus ja jokaisella $B \in \mathcal{B}$ on voimassa $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$.

Todistus. Sen osoittamiseksi, että $\mathcal{X}$ on A:n ositus, riittää näyttää, että jokainen A:n alkio kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{B}$ joukkoon. Olkoon a A:n alkio. Merkitään $\mathcal{B}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$. Tällöin $a \in \bigcap \mathcal{B}_a$ ja $a \notin \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_a)$, joten $a \in X_{\mathcal{B}_a}$. Olkoon nyt $\mathcal{C}$ sellainen $\mathcal{B}$:n osaperhe, että $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}_a$. Tällöin on olemassa sellainen joukko $B \in \mathcal{B}$, että joko $B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_a$ tai $B \in \mathcal{B}_a \setminus \mathcal{C}$. Jos $B \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}_a$, niin $a \notin B$ ja $X_{\mathcal{C}} \subset B$, joten tässä tapauksessa $a \notin X_{\mathcal{C}}$. Jos taas $B \in \mathcal{B}_a \setminus \mathcal{C}$, niin $a \in B$ ja $X_{\mathcal{C}} \subset A \setminus \bigcup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}) \subset A \setminus B$, joten tässäkään tapauksessa a ei kuulu joukkoon $X_{\mathcal{C}}$. Olemme näyttäneet, että jokaiselle $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ pätee, että jos $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}_a$, niin $a \notin X_{\mathcal{C}}$. Täten a kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{X}$ joukkoon.

Osoitamme vielä, että jokaiselle $B \in \mathcal{B}$ on voimassa $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$. Olkoon B perheen $\mathcal{B}$ joukko. Yllä esitetyn nojalla on jokaisella $a \in A$ voimassa $a \in X_{\mathcal{B}_a}$. Jos $a \in B$, niin $B \in \mathcal{B}_a$ ja näin ollen $X_{\mathcal{B}_a} \subset \bigcap \mathcal{B}_a \subset B$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa $B = \bigcup \{X_{\mathcal{B}_a} : a \in B\}$; tästä seuraa, koska $\{X_{\mathcal{B}_a} : a \in B\} \subset \mathcal{X}$, että $B = \bigcup \{X \in \mathcal{X} : X \subset B\}$. $\square$

Jos yllä olevan todistuksen merkintöjä käyttäen määrittelemme kuvauksen $f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ asettamalla $f(a) = \mathcal{B}_a$ jokaisella $a \in A$, niin on voimassa

$$f^{-1}\{\mathcal{C}\} = \{a \in A : \mathcal{B}_a = \mathcal{C}\} = X_{\mathcal{C}} \qquad \text{jokaisella } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}.$$

Yleisesti saamme seuraavan tuloksen.

I 3.4 Lause *Jos $f : A \to E$ on kuvaus, niin perhe*

$$\mathcal{O}_f = \{f^{-1}\{e\} : e \in f(A)\}$$

on A:n ositus.

Kääntäen, jokainen A:n ositus voidaan muodostaa tällä tavalla.

Todistus. Selvästi $f^{-1}\{e\} \neq \emptyset$ jokaisella $e \in f(A)$. Jokainen $a \in A$ kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\mathcal{O}_f$ joukkoon, nimittäin joukkoon $f^{-1}\{f(x)\}$. Täten $\mathcal{O}_f$ on A:n ositus.

Kääntäen, olkoon $\mathcal{O}$ A:n ositus. Tällöin voidaan määritellä kuvaus $g : A \to \mathcal{O}$ asettamalla $g(a) = O$ kun $a \in O \in \mathcal{O}$. Kuvaus g on surjektio ja jokaisella $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $O = g^{-1}\{O\}$; näin ollen $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g$. □

Yllä olevan todistuksen lopussa määriteltyä kuvausta g kutsutaan *kanooniseksi surjektioksi* $A \to \mathcal{O}$.

Voimme tarkastella joukon osituksia myös ns. ekvivalenssirelaatioiden avulla. Ekvivalenssilla tarkoitamme samanarvoisuutta (jonkun tarkastelun suhteen).

Esimerkki. Atomien ytimet ovat ekvivalentit

(1) kemiassa, kun niillä on sama ytimen varaus (järjestysluku) Z

(2) fysiikassa, kun niillä on sama Z ja sama massaluku A

(3) ydinfysiikassa, kun niillä on samat Z ja A ja sama viritystila.

Ekvivalenssi on siis eri asia eri tilanteissa. Siihen liittyy kuitenkin aina luokittelu. Esimerkissä

(1) alkuaineet (2) isotoopit (3) ytimen isomeerit.

Ekvivalenssirelaatiot voidaan määritellä luokittelujen kautta. Joukon alkioiden luokittelu jakaa alkiot erillisiin luokkiin, joten luokittelu määrää joukon osituksen. Kääntäen, jokainen joukon ositus luokittelee joukon alkiot sen mukaan, mihin osituksen joukkoon ne kuuluvat. Joukon kaksi alkiota ovat ositukseen liittyvän luokittelun mielessä ekvivalentit, mikäli ne kuuluvat samaan osituksen joukkoon. Tarkastelemme nyt osituksen määräämän ekvivalenssin ominaisuuksia.

I 3.5 Lause *Jos $\mathcal{O}$ on joukon X ositus, niin relaatiolla*

$$E_{\mathcal{O}} = \{(x,y) \in X \times X : \exists O \in \mathcal{O} \text{ siten, että } x \in O \text{ ja } y \in O\}$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) *(refleksiivisyys)* $(x,x) \in E_{\mathcal{O}}$ *jokaisella* $x \in X$.

(ii) *(symmetrisyys)* $(x,y) \in E_{\mathcal{O}} \Rightarrow (y,x) \in E_{\mathcal{O}}$ *kaikilla* $x, y \in X$.

(iii) *(transitiivisuus)* $(x,y) \in E_{\mathcal{O}}$ *ja* $(y,z) \in E_{\mathcal{O}} \Rightarrow (x,z) \in E_{\mathcal{O}}$ *kaikilla* $x, y, z \in X$.

Todistus. Merkitsemme f:llä kanoonista surjektiota $X \to \mathcal{O}$. Tällöin kaikilla $x \in X$ ja $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $f(x) = O \iff x \in O$. Näin ollen kaikilla $x \in X$ ja $y \in X$ on voimassa $(x,y) \in E_{\mathcal{O}} \iff f(x) = f(y)$. Lauseen ehtojen voimassaolo on nyt selvää, sillä kaikilla $x \in X, y \in X$ ja $z \in X$ on voimassa:

(i) $f(x) = f(x)$.

(ii) $f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x)$.

(iii) $f(x) = f(y)$ ja $f(y) = f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z)$. □

Joukon X relaation R refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus voidaan ilmaista myös seuraavasti:

(refleksiivisyys)	xRx jokaisella $x \in X$.
(symmetrisyys)	$xRy \Rightarrow yRx$ kaikilla $x, y \in X$.
(transitiivisuus)	$xRy \;\&\; yRz \;\Rightarrow\; xRz$ kaikilla $x, y, z \in X$.

I 3.6 Määritelmä Joukon X relaatio R on X:n *ekvivalenssirelaatio*, jos R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Merkitsemme usein ekvivalenssirelaatioita muotoa $\sim$ ja $\equiv$ olevilla symboleilla ja kirjoitamme esimerkiksi $x \sim y$ emmekä $(x,y) \in \sim$.

I 3.7 Esimerkkejä **(a)** Identtisyysrelaatio id_X on joukon X ekvivalenssirelaatio.
(b) Määrittelemme kokonaislukujen joukossa Z relaation R asettamalla $(x,y) \in R \iff x - y$ on parillinen. Tällöin R on

(i) refleksiivinen: $x - x = 0$ on parillinen.

(ii) symmetrinen: $x - y$ on parillinen $\Rightarrow y - x = -(x - y)$ on parillinen.

(iii) transitiivinen: $x - y$ ja $y - z$ parillisia $\Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z)$ on parillinen.

Täten R on ekvivalenssirelaatio. Tavallisesti merkitsemme sitä $x \equiv y \pmod 2$

Liitimme Lauseessa I 3.5 jokaiseen joukon X ositukseen $\mathcal{O}$ X:n ekvivalenssirelaation $E_{\mathcal{O}}$. Osoitamme nyt, että saamme tällä tavalla kaikki X:n ekvivalenssirelaatiot. Todistamme aluksi eräitä aputuloksia.

I 3.8 Lemma *Joukon X relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in X$ on voimassa $y \in R\{x\} \Rightarrow R\{y\} \subset R\{x\}$.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletetaan, että relaatio R on transitiivinen. Olkoon X:n alkioille x ja y voimassa $y \in R\{x\}$ eli $(x, y) \in R$. Olkoon z joukon $R\{y\}$ alkio. Tällöin $(y, z) \in R$. Koska R on transitiivinen ja koska on voimassa $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$, on voimassa $(x, z) \in R$ eli $z \in R\{x\}$. Olemme osoittaneet, että $R\{y\} \subset R\{x\}$.
Riittävyys. Oletetaan, että relaatio R toteuttaa lemmassa mainitun ehdon. Näytetään, että R on transitiivinen. Olkoon X:n alkioille x, y ja z voimassa $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$. Tällöin $y \in R\{x\}$, joten oletuksen nojalla on voimassa $R\{y\} \subset R\{x\}$. On myös voimassa $z \in R\{y\}$ ja täten edelleen $z \in R\{x\}$ eli $(x, z) \in R$. Olemme näyttäneet, että R on transitiivinen. $\square$

Voimme lausua edellisen tuloksen myös seuraavasti: relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subset R$.

I 3.9 Lause *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Tällöin kaikilla $x, y \in X$ on voimassa*

$$\boxed{xRy \iff R\{x\} = R\{y\} \iff R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset}$$

Todistus. Jos alkioille x ja y on voimassa xRy, niin R:n symmetrisyyden nojalla on voimassa yRx; tällöin $y \in R\{x\}$ ja $x \in R\{y\}$, ja Lemman I 3.8 tuloksesta seuraa R:n transitiivisuuden nojalla, että $R\{x\} = R\{y\}$.

Koska R on refleksiivinen, on jokaisella $y \in X$ voimassa yRy eli $y \in R\{y\}$ ja näin ollen $R\{y\} \neq \emptyset$. Täten jos alkioille x ja y on voimassa $R\{x\} = R\{y\}$, niin on voimassa $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset$.

Todistuksen loppuunsaattamiseksi osoitamme vielä, että $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset \Rightarrow xRy$. Oletamme siis, että $R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset$. Olkoon z joukon $R\{x\} \cap R\{y\}$ alkio. Tällöin on voimassa xRz ja yRz. Koska R on symmetrinen, on voimassa zRy. Koska R on transitiivinen ja koska on voimassa xRz ja zRy, on siis voimassa xRy. $\square$

Kun R on joukon X ekvivalenssirelaatio ja $x \in X$, niin kutsumme joukkoa $R\{x\}$ alkion x *ekvivalenssiluokaksi* relaatiossa R.

I 3.10 Korollaari *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Tällöin joukkoperhe $\{R\{x\} : x \in X\}$ on X:n ositus.*

Todistus. Lauseen I 3.9 tuloksesta seuraa, että joukot $R\{x\}, x \in X$ ovat epätyhjiä ja että jokaisella $y \in X$ alkio y kuuluu täsmälleen yhteen perheen $\{R\{x\} : x \in X\}$ joukkoon, nimittäin joukkoon $R\{y\}$. $\square$

Kutsumme ekvivalenssirelaatiota R vastaavaa joukon X ositusta $\{R\{x\} : x \in X\}$ joukon X *tekijäjoukoksi* ekvivalenssirelaation R suhteen ja merkitsemme sitä usein symbolilla X/R. Kanooninen surjektio $X \to X/R$ on kuvaus $x \mapsto R\{x\}$, $x \in X$.

Näytämme nyt, että ekvivalenssirelaation R tekijäjoukkoon Lauseen I 3.5 mielessä liittyvä ekvivalenssirelaatio on R.

I 3.11 Lause *Olkoon R joukon X ekvivalenssirelaatio. Merkitään $\mathcal{O}$:lla X:n ositusta $\{R\{x\} : x \in X\}$. Tällöin $R = E_{\mathcal{O}}$.*

Todistus. Käyttäen hyväksi perheen $\mathcal{O}$ ja relaation $E_{\mathcal{O}}$ määritelmiä, relaation R symmetrisyyttä sekä Lauseen I 3.9 tulosta, nähdään olevan voimassa

$$\begin{aligned}(x,y) \in E_{\mathcal{O}} &\iff (\exists z \in X)(x \in R\{z\} \;\&\; y \in R\{z\}) \\ &\iff (\exists z \in X)(z \in R\{x\} \;\&\; z \in R\{y\}) \\ &\iff R\{x\} \cap R\{y\} \neq \emptyset \\ &\iff xRy \\ &\iff (x,y) \in R\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Toisaalta näemme helposti, että jos $\mathcal{O}$ on joukon X ositus, niin X:n ekvivalenssirelaation $E_{\mathcal{O}}$ tekijäjoukko $X/E_{\mathcal{O}}$ on sama kuin ositus $\mathcal{O}$. Näin ollen joukon X ositukset ja ekvivalenssirelaatiot ovat bijektiivisessä vastaavuudessa keskenään edellä tarkasteltujen operaatioiden ($\mathcal{O} \longmapsto E_{\mathcal{O}}$ ja $R \longmapsto X/R$) välityksellä.

Esitämme lopuksi lausekkeen annetun X:n relaation S "virittämälle" ekvivalenssirelaatiolle. Ekvivalenssirelaatio E on *pienin* S:n sisältävä ekvivalenssirelaatio, mikäli $S \subset E$ ja jokaiselle ekvivalenssirelaatiolle E' on voimassa: jos $S \subset E'$, niin $E \subset E'$. Vastaavasti määrittelemme pienimmän S:n sisältävän symmetrisen relaation, refleksiivisen relaation jne.

Näemme helposti, että joukon X relaatio R on refleksiivinen jos ja vain jos $\mathrm{id}_X \subset R$ ja R on symmetrinen jos ja vain jos $R^{-1} = R$; täten saamme seuraavan tuloksen.

I 3.12 Lemma *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin on voimassa:*

(a) $S \cup \mathrm{id}_X$ on pienin S:n sisältävä refleksiivinen relaatio.

(b) $S \cup S^{-1}$ on pienin S:n sisältävä symmetrinen relaatio.

Pienin relaation S sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio konstruoidaan seuraavasti. Merkitään $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja luvuille $n > 0$ määritellään S^n rekursiivisesti kaavan $S^n = S \circ S^{n-1}$ avulla. Merkitään lopuksi $S^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$.

I 3.13 Lemma *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin on voimassa:*

(a) S^∞ on pienin S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio.

(b) Jos S on symmetrinen, niin S^∞ on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. (a) Koska $\mathrm{id}_X = S^0 \subset S^\infty$, relaatio S^∞ on refleksiivinen. Osoitamme, että S^∞ on transitiivinen. Käyttämällä induktiota luvun n suhteen näytämme, että kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$ on voimassa $S^n \circ S^k = S^{n+k}$: väite pätee n:n arvolla 0, koska $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja jos on voimassa $S^n \circ S^k = S^{n+k}$, niin tällöin on myös voimassa

$$S^{n+1} \circ S^k = (S \circ S^n) \circ S^k = S \circ (S^n \circ S^k) = S \circ S^{n+k} = S^{n+k+1}.$$

Olkoot nyt x, y ja z sellaisia X:n alkioita, että on voimassa $(x, y) \in S^\infty$ ja $(y, z) \in S^\infty$. Tällöin on olemassa sellaiset luonnolliset luvut k ja n, että $(x, y) \in S^k$ ja $(y, z) \in S^n$. Koska nyt $(x, z) \in S^n \circ S^k$, niin edellä esitetyn nojalla on voimassa $(x, z) \in S^{n+k} \subset S^\infty$. Olemme osoittaneet, että relaatio S^∞ on transitiivinen.

Olkoon T joku toinen S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio. Koska T on transitiivinen, on voimassa $T \circ T \subset T$. Relaation T refleksiivisuudesta seuraa, että $S^0 \subset T$. Jos luvulle $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $S^n \subset T$, niin tällöin on voimassa $S^{n+1} = S \circ S^n \subset T \circ T \subset T$. Edellisestä seuraa induktioperiaatteen nojalla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $S^n \subset T$. Täten $S^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n \subset T$. Olemme näyttäneet, että S^∞ on pienin S:n sisältävä transitiivinen ja refleksiivinen relaatio.

(b) Oletamme, että S on symmetrinen. Tällöin $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja $S^1 = S$ ovat symmetrisiä ja induktiota käyttäen näemme helposti, että S^n on symmetrinen myös jokaisella $n > 1$: jos nimittäin S^{n-1} on symmetrinen eli $(S^{n-1})^{-1} = S^{n-1}$, niin (a)-kohdan todistuksessa esitetyn mukaan on voimassa $S^n = S^{n-1} \circ S$ ja tästä seuraa Lauseen I 1.4 avulla, että S^n on symmetrinen:

$$(S^n)^{-1} = (S^{n-1} \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ (S^{n-1})^{-1} = S \circ S^{n-1} = S^n \ .$$

Näemme helposti, että on voimassa $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n)^{-1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S^n)^{-1}$; tästä seuraa edellä esitetyn nojalla, että S^∞ on symmetrinen:

$$(S^\infty)^{-1} = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n)^{-1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S^n)^{-1} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n = S^\infty \ . \qquad \square$$

I 3.14 Korollaari *Olkoon S joukon X relaatio. Tällöin $(S \cup S^{-1})^\infty$ on pienin S:n sisältävä X:n ekvivalenssirelaatio.*

HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN I

1. Olkoot $R, S \subseteq Y \times Z$ ja $T \subseteq X \times Y$ relaatioita. Osoita, että

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$
$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

2. Merkitään X:llä joukon A kaikkien epätyhjien osajoukkojen muodostamaa perhettä (ts. $X = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$). Määritellään relaatiot $S \subset X \times X$ ja $R \subset X \times X$ asettamalla kaikilla $B, C \in X$:

$$(B, C) \in S \iff B \subset C \qquad \text{ja} \qquad (B, C) \in R \iff B \cap C \neq \emptyset \ .$$

Osoita, että $E = S \circ S^{-1}$

Olkoon $X = \{x_i : i \in I\}$ ja $Y = \{y_j : j \in J\}$. *Relaation $R \subset X \times Y$ matriisi* on $M(R) = (a_{ji})$, missä $a_{ji} = 1$ kun $(x_i, y_j) \in R$ ja $a_{ji} = 0$ kun $(x_i, y_j) \notin R$.

3. Olkoot $R, S \subset X \times Y$ relaatioita, $M(R) = (a_{ji})$ ja $M(S) = (b_{ji})$. Osoita, että $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S) = (\sup\ (a_{ji}, b_{ji}))$, $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S) = (\inf\ (a_{ji}, b_{ji}))$ ja että lisäksi $R \subset S \Leftrightarrow M(R) \leq M(S)$ eli $a_{ji} \leq b_{ji}$ kaikilla i, j.

4. Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times Z$ relaatioita, $M(R) = (a_{ji})$ ja $M(S) = (b_{kj})$. Osoitettava, että $M(S \circ R)$ on ns. *Boolen matriisitulo* $M(S)M(R) = (c_{ki})$, missä $c_{ki} = \sup_j b_{kj} a_{ji}$.

5. Todista induktiolla luvun n suhteen: jos $k_1, ..., k_n$ ovat luonnollisia lukuja, niin $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n \cdot \max(k_1, ..., k_n)$.

6. Esitä rekursiivinen määritelmä eksponenttifunktiolle $n \mapsto m^n$.

7. Mitkä seuraavista joukon $\mathbb{N}^*$ alkioiden x ja y välisistä relaatioista ovat refleksiivisiä, symmetrisiä tai transitiivisia:
(a) "$x + y$ on parillinen",
(b) "$x - y < 10$",
(c) "x—y",
(d) "xy on pariton".

8. Olkoon S joukon X relaatio. Asetamme $S^0 = \mathrm{id}_X$ ja määrittelemme relaatiot $S^{\pm n}$ rekursiivisesti kaavoilla $S^{n+1} = S \circ S^n$ ja $S^{-n-1} = S^{-n} \circ S^{-1}$. Näytä, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $(S^n)^{-1} = S^{-n}$.

9. Osoita, että kun R on X:n transitiivinen relaatio, niin myös refleksiivinen relaatio $R \cup \Delta_X$ on transitiivinen.

10. Lemmassa I 3.13 osoitettiin, että kun S on joukon X relaatio, niin relaatio $S^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$ on pienin X:n transitiivinen ja refleksiivinen relaatio, joka sisältää S:n. Osoita, että $S^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$ on pienin S:n sisältävä transitiivinen relaatio; relaatiota S^+ kutsutaan relaation S *transitiiviseksi sulkeumaksi*.

11. Olkoon $n > 1$. Määritellään kuvaus $f : [n] \to [n]$ asettamalla $f(i) = i + 1$ kaikille $i \in [n-1]$ ja $f(n) = 1$. Laske relaation f transitiivinen sulkeuma.

12. Osoita, että n-joukon X relaatiolle R pätee yhtälö $R^+ = R \cup \ldots \cup R^n$.

13. Olkoon R n-joukon X relaatio. Osoita, että jos R on refleksiivinen, niin $R^+ = R \cup \ldots \cup R^{n-1}$. Näytä esimerkillä, että yleisessä tapauksessa kaavasta $R^+ = R \cup \ldots \cup R^n$ ei voi jättää pois termiä R^n.

14. Olkoon R refleksiivinen relaatio joukossa X. Osoita, että $R \subset R \circ R$.

15. Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio. Osoita, että $R^{-1} \circ R$ on symmetrinen. Milloin se on refleksiivinen?

16. Osoita, että $R \subset X \times X$ on ekvivalenssirelaatio, jos ja vain jos
i) $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset R$,
ii) $R^{-1} = R$,
iii) $R \circ R \subset R$.

17. Olkoon $\mathcal{A}$ joukon X osajoukkoperhe. Merkitsemme $(\mathcal{A})_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ jokaisella $x \in X$ ja määrittelemme joukon X relaation $\sim$ asettamalla $x \sim y$ jos ja vain jos $(\mathcal{A})_x = (\mathcal{A})_y$.
i) Näytä, että $\sim$ on ekvivalenssi.
ii) Näytä, että alkion $x \in X$ ekvivalenssiluokka on $\bigcap(\mathcal{A})_x \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A})_x)$.

iii) Näytä, että jos $\mathcal{A}$ on X:n ositus, niin $X/\!\sim\, = \mathcal{A}$.

18. Olkoon relaatiolla R matriisi (katso tehtävä 3)

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etsi R:n transitiivisen sulkeuman $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ matriisi.

19. Olkoon $R \subset X \times X$ relaatio ja $M(R) = (a_{ji})$. Osoita, että R on
i) refleksiivinen $\Leftrightarrow a_{ii} = 1 \ \forall i \in I$,
ii) symmetrinen $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j \in I$,
iii) antisymmetrinen $\Leftrightarrow a_{ij}a_{ji} = 0$ kun $i \neq j$,
iv) transitiivinen $\Leftrightarrow M(R)^2 = M(R)M(R) \leq M(R)$.

20. Olkoon S äärellisen joukon X symmetrinen ja refleksiivinen relaatio. Osoita, että joukossa X on parillinen määrä alkioita jos ja vain jos joukossa S on parillinen määrä alkioita.

21. Luettele joukon $\{a, b, c, d\}$ kaikki ositukset.

II

Joukkojen koko

II 1. Koon vertailu. Laatikkoperiaate.

Ryhdymme nyt tarkastelemaan kahden joukon välisten kuvausten olemassaolon vaikutusta joukkojen äärellisyyteen ja niiden kokoihin. Lähtökohtana on Lauseen I 2.6 tulos: jos joukkojen A ja B välillä on bijektio ja jos toinen joukoista on äärellinen, niin tällöin molemmat ovat äärellisiä ja niille pätee yhtälö $|A| = |B|$.

Jos f on injektio joukolta A joukolle B, niin tällöin f on bijektio joukolta A joukon B osajoukolle $f(B)$. Osoitamme nyt, että joukkojen A ja B ollessa äärellisiä, jokaisella surjektiolla $f : A \to B$ on rajoittuma, joka on bijektio joukolle B.

II 1.1 Lemma *Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon f surjektio joukolta A joukolle B. Tällöin on olemassa sellainen A:n osajoukko C, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$.*

Todistus. Esitetämme joukon A muodossa $A = \{a_i : i \in [n]\}$, missä $n = |A|$. Jokaisella $b \in B$ merkitsemme $k(b) = \min\{i \in [n] : f(a_i) = b\}$. Merkitsemme $C = \{a_{k(b)} : b \in B\}$ ja merkitsemme edelleen $g = f|C$. Kuvaus g on surjektio $C \to B$, koska jokaiselle $b \in B$ pätee, että $a_{k(b)} \in C$ ja $g(a_{k(b)}) = f(a_{k(b)}) = b$. Kuvaus g on myös injektio, sillä jos a ja a' ovat joukon C kaksi eri alkiota, niin tällöin on olemassa sellaiset joukon B alkiot b ja b', että $a = a_{k(b)}$ ja $a' = a_{k(b')}$; nyt on voimassa $g(a) = f(a) = b$ ja $g(a') = f(a') = b'$ ja lisäksi $b \neq b'$, koska $a \neq a'$. $\square$

II 1.2 Lause *Olkoot A ja B joukkoja ja olkoon f kuvaus $A \to B$.*

(a) *Jos A on äärellinen ja f on surjektio, niin tällöin B on äärellinen ja $|A| \geq |B|$.*

(b) *Jos B on äärellinen ja f on injektio, niin tällöin A on äärellinen ja $|A| \leq |B|$.*

Todistus. **(a)** Oletetaan, että A on äärellinen ja f on surjektio. Lemman II 1.1 nojalla on olemassa sellainen joukko $C \subset A$, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$. Lauseen I 2.7 nojalla joukko C on äärellinen ja on voimassa $|C| \leq |A|$. Lauseesta I 2.6 seuraa nyt, että joukko B on äärellinen ja $|B| = |C| \leq |A|$.
(b) Oletetaan, että B on äärellinen ja f on injektio. Lauseen I 2.7 nojalla joukon B osajoukko $f(A)$ on äärellinen ja $|f(A)| \leq |B|$. Injektio f on bijektio $A \to f(A)$ ja Lauseesta I 2.6 seuraa, että joukko A on äärellinen ja $|A| = |f(A)| \leq |B|$. □

Osoitamme seuraavaksi, että edellisen lauseen epäyhtälöissä pätee yhtäsuuruus ainoastaan siinä tapauksessa, että kuvaus f on bijektio.

II 1.3 Lause *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja ja f kuvaus $A \to B$. Oletetaan, että on voimassa $|A| = |B|$. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:*
(a) *f on surjektio.*
(b) *f on injektio.*
(c) *f on bijektio.*

Todistus. Koska f on bijektio jos ja vain jos f on sekä surjektio että injektio, niin riittää näyttää, että (a)$\Rightarrow$(c) ja (b)$\Rightarrow$(c).
(a)$\Rightarrow$(c): Oletetaan, että f on surjektio. Osoitetaan, että tällöin f on injektio. Lemman II 1.1 nojalla on olemassa sellainen joukko $C \subset A$, että kuvaus $f|C$ on bijektio $C \to B$. Lauseen I 2.6 nojalla joukko C on äärellinen ja $|C| = |B|$. Koska $C \subset A$ ja $|C| = |B| = |A|$, Lauseen I 2.7 tuloksesta seuraa, että $C = A$. Edellä esitetyn nojalla kuvaus $f|A$, eli kuvaus f, on bijektio.
(b)$\Rightarrow$(c): Oletetaan, että f on injektio. Tällöin f on bijektio $A \to f(A)$ ja Lauseiden I 2.6 ja I 2.7 tuloksista seuraa, kuten todistuksen edellisessä osassa, että tässä tapauksessa on voimassa $f(A) = B$; jälleen f on bijektio. □

Seuraava tulos osoittaa, että kahden äärellisen joukon kokoja voidaan vertailla kuvausten avulla.

II 1.4 Lause *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Tällöin on voimassa:*
(a) *$|X| \leq |Y|$ jos ja vain jos on olemassa injektio $X \to Y$.*
(b) *$|X| \geq |Y|$ jos ja vain jos on olemassa surjektio $X \to Y$.*
(c) *$|X| = |Y|$ jos ja vain jos on olemassa bijektio $X \to Y$.*

Todistus. Merkitään $n = |X|$ ja $m = |Y|$. Olkoot kuvaukset $f : X \to [n]$ ja $g : Y \to [m]$ bijektioita.

(a) Jos $n \leq m$, niin $g^{-1} \circ f$ on injektio $X \to Y$.

Jos on olemassa injektio $X \to Y$, niin tällöin $n \leq m$ Lauseen II 1.2 nojalla.

(b) Jos $n \geq m$, niin kuvaus $h : X \to Y$, missä $h(x) = g^{-1}(f(x))$ jos $f(x) \in [m]$ ja $h(x) = g^{-1}(m)$ jos $f(x) \notin [m]$, on surjektio.

Jos on olemassa surjektio $X \to Y$, niin tällöin $n \geq m$ Lauseen II 1.2 nojalla.

(c) Jos $n = m$, niin kuvaus $g^{-1} \circ f$ on bijektio $X \to Y$.

Jos on olemassa bijektio $X \to Y$, niin $n = m$ Lauseen I 2.6 nojalla. □

Edellisen lauseen (a)-kohdan tulokselle saadaan seuraus, jonka matemaattinen sisältö on hyvin vaatimaton, mutta joka sisältää niin käyttökelpoisen "kombinatorisen periaatteen", että sille on jopa annettu oma nimi.

II 1.5 Korollaari (Laatikkoperiaate) *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja, $|X| > |Y|$ ja f kuvaus $X \to Y$. Tällöin on olemassa sellaiset $x, z \in X$, että $x \neq z$ ja $f(x) = f(z)$.*

Todistus. Muussa tapauksessa f olisi injektio ja olisi voimassa $|X| \leq |Y|$. □

Tulkinta: X:n alkiot ovat "palloja", Y:n alkiot "laatikoita" ja f on "pallojen pano laatikoihin".

II 1.6 Esimerkkejä **(a) Väite.** Jokaisessa kahden tai useamman ihmisen muodostamassa joukossa X on kaksi henkilöä, joilla on sama määrä tuttavia joukossa X (oletamme "tuttavuuden" olevan aina molemminpuolista).

Todistus. Merkitään $|X| = n$. Määritellään kuvaus $f : X \to \{0, 1, ..., n-1\}$ asettamalla $f(x) = |\{y \in X : y\ x\text{:n tuttava}\}|$ jokaisella $x \in X$. Nyt on voimassa joko $0 \notin f(X)$ tai $n - 1 \notin f(X)$ ("jos joku on kaikkien tuttava, niin jokaisella on joku tuttava"). Täten $|f(X)| \leq n - 1 < |X|$. Laatikkoperiaatteen nojalla on joillakin $x \neq y$ voimassa $f(x) = f(y)$.

(b) Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen joukko ja olkoon luvulle $n \in \mathbb{N}^*$ voimassa $n < |A|$. Tällöin on olemassa $a, b \in A$ siten, että $a \neq b$ ja $a - b$ on jaollinen n:llä.

Todistus. Kokonaislukujen jakoyhtälön nojalla jokaisella $a \in A$ on olemassa sellainen $q_a, r_a \in \mathbb{N}$, että $a = q_a \cdot n + r_a$ ja $0 \leq r_a < n$. Koska $|\{0, 1, ..., n-1\}| = n < |A|$, niin laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellaiset $a, b \in A$, että $a \neq b$ ja $r_a = r_b$. Nyt

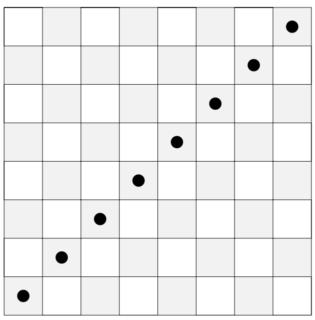
$$a - b = q_a \cdot n + r_a - q_b \cdot n - r_b = (q_a - q_b) \cdot n,$$

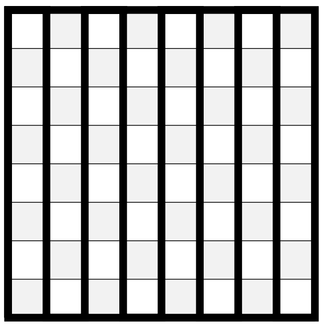
joten $a - b$ on jaollinen n:llä. □

(c) Ongelma. Mikä on suurin määrä torneja, jotka voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan?

Ratkaisu. Jos kaksi laudalle asetettua tornia uhkaa toisiaan, niin ne ovat joko samalla ruutujen muodostamalla "vaakarivillä" tai samalla "pystyrivillä". Sijoittamalla tornin jommankumman "lävistäjän" jokaiseen ruutuun, kuten alla vasemmanpuoleisessa kuvassa, saamme sijoitettua vaaditulla tavalla kahdeksan tornia.

Osoitamme, ettei yhdeksää tornia voida sijoittaa shakkilaudalle vaaditulla tavalla. Jaamme laudan ruudukon alla oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti kahdeksaan "laatikkoon". Jos yhteen laatikkoon tulee useampi kuin yksi torni, niin laatikossa on kaksi tornia, joiden "välissä" ei ole kolmatta ja tällöin nämä kaksi uhkaavat toisiaan. Täten jokaiseen laatikkoon voidaan sijoittaa korkeintaan yksi torni; laatikkoperiaatteen nojalla torneja voidaan sijoittaa yhteensä korkeintaan kahdeksan kappaletta.

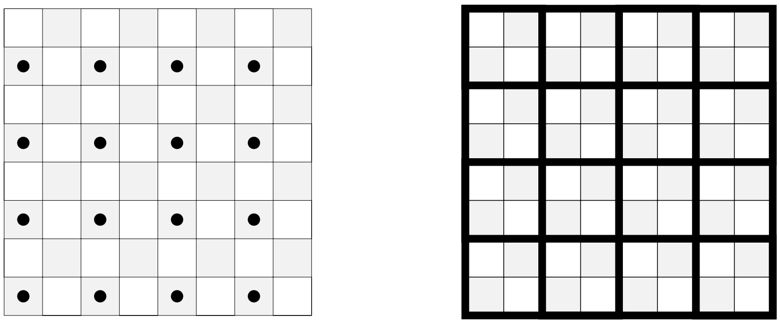




(d) Ongelma. Mikä on suurin määrä kuninkaita, jotka voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan?

Ratkaisu. Jos kahdessa eri ruudussa olevat kuninkaat uhkaavat toisiaan, niin ruudut "koskettavat" toisiaan (joko reunoiltaan tai kulmiltaan). Sijoittamalla alla vasemmanpuoleisen kuvan mukaisesti kuninkaan joka toisen vaakarivin joka toiseen ruutuun, saamme sijoitettua kuusitoista kuningasta niin, etteivät mitkään kaksi uhkaa toisiaan.

Osoitamme seuraavaksi, ettemme voi sijoittaa seitsemäätoista kuningasta shakkilaudan eri ruutuihin niin, etteivät mitkään kaksi uhkaisi toisiaan. Jaamme laudan ruudukon alla oikenpuoleisen kuvan mukaisesti kuuteentoista neljän ruudun "neliöön". Jos sijoitamme yhteen neliöön kaksi kuningasta, niin ne uhkaavat toisiaan. Laatikkoperiaatteesta seuraa, että "sallitussa" sijoittelussa voi olla korkeintaan kuusitoista kuningasta.



Laatikkoperiaatteelle voidaan esittää vahvempi muoto.

II 1.7 Lause (Yleistetty laatikkoperiaate) *Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja, f kuvaus $X \to Y$ ja n luonnollinen luku. Jos $|X| > n \cdot |Y|$, niin on olemassa sellainen $y \in Y$, että $\left|f^{-1}\{y\}\right| > n$.*

Todistus. Teemme vastaväitteen: jokaisella $y \in Y$ on voimassa $\left|f^{-1}\{y\}\right| \leq n$. Merkitsemme $k = |Y|$ ja esitämme joukon Y muodossa $Y = \{y_i : i \in [k]\}$. Merkitsemme edelleen $l_i = \left|f^{-1}\{y_i\}\right|$ jokaisella $i \in [k]$ ja esitämme joukon $f^{-1}\{y_i\}$ muodossa $f^{-1}\{y_i\} = \{x_{ij} : j \in [l_i]\}$. Koska jokaisella $i \in [k]$ on voimassa $l_i \leq n$, voimme määritellä kuvauksen $\varphi : X \to [k] \times [n]$ asettamalla $\varphi(x_{ij}) = (i, j)$ jokaisella $i \in [k]$ ja jokaisella $j \in [l_i]$. Kuvaus φ on selvästikin injektio ja Lauseen II 1.4 nojalla on voimassa $|X| \leq |[k] \times [n]| = k \cdot n$. Edellisen nojalla pätee, että $|X| \leq k \cdot n = n \cdot |Y|$; tämä on kuitenkin ristiriidassa lauseen oletusten kanssa. Koska vastaväite johti ristiriitaan, se on väärä ja näinollen on olemassa sellainen $y \in Y$, että $\left|f^{-1}\{y\}\right| > n$.

□

II 1.10 Esimerkkejä (a) Tehtävä Kahdessa sisäkkäisessä piirissä on kummassakin 20 lasta. Ulommassa piirissä on 10 tyttöä ja 10 poikaa. Osoita, että piirit voivat pyörähtää sellaiseen asentoon, että eri piireissä vastaavissa kohdissa olevat lapset muodostavat vähintään 10 tyttö–poika paria.

Ratkaisu. Oletetaan, että uloin piiri pysyy paikallaan. Sisempi piiri voi pyörähtää 20:een eri asentoon suhteessa ulompaan piiriin; merkitään asentoja symbolein $a_1, ..., a_{20}$. Merkitään n_i:llä asentoa a_i vastaavien tyttö–poika parien lukumäärää. Osoitetaan, että $\sum_{i=1}^{20} n_i = 200$. Merkitään sisemmän piirin lapsia $l_1, ..., l_{20}$. Luvuille $i, j \in [20]$ asetetaan $k_{i,j} = 1$ jos l_j kuuluu tyttö–poika pariin asennossa a_i ja muussa tapauksessa asetetaan $k_{i,j} = 0$. Pannaan merkille, että $n_i = \sum_{j=1}^{20} k_{i,j}$ jokaisella i. Täten

$$\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{20} k_{i,j} = \sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{20} k_{i,j}.$$

Koska ulommassa piirissä on 10 tyttöä ja 10 poikaa, on jokaisella $j \in [20]$ voimassa $\sum_{i=1}^{20} k_{i,j} = 10$. Täten $\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20} 10 = 200$. Koska $\sum_{i=1}^{20} n_i \leq 20 \cdot \max(n_1, ..., n_{20})$, niin on voimassa $\max(n_1, ..., n_{20}) \geq 10$.

Huomautus *Edellinen päättely valaisee erästä kombinatoriikassa usein käytettyä menetelmää: lasketaan jokin suure kahdella eri tavalla ja vedetään johtopäätös siitä, että laskujen tuloksen on oltava sama.*

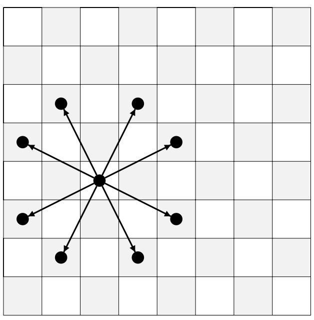
(b) Tehtävä. Tason (tai avaruuden) pistettä kutsutaan *kokonaispisteeksi*, jos pisteen kaikki koordinaatit ovat kokonaislukuja. Osoita, että jos X on äärellinen joukko tason kokonaispisteitä ja $|X| \geq 9$, niin on olemassa kolme X:n pistettä, joiden välisten yhdysjanojen keskipisteet ovat kokonaispisteitä.

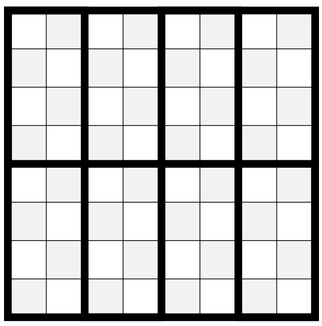
Ratkaisu. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ asettamalla $f(n) = 0$ kun n on parillinen ja $f(n) = 1$ kun n on pariton. Lisäksi määrittelemme kuvauksen $g : X \to \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ asettamalla $g(x, y) = (f(x), f(y))$ jokaisella $(x, y) \in X$. Koska on voimassa $|\{0, 1\} \times \{0, 1\}| = 4$ ja $|X| \geq 9 > 2 \cdot 4$, yleistetyn laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellainen joukon $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ alkio (i, j), että $\left|g^{-1}(i, j)\right| > 2$. Olkoon $A \subset g^{-1}(i, j)$ kolmen alkion joukko. Jos nyt (x, y) ja (a, b) ovat A:n alkioita, niin $f(x) = f(a) = i$ ja $f(y) = f(b) = j$, ja tästä seuraa, että luvut $x + a$ ja $y + b$ ovat parillisia. Täten $(x + a)/2$ ja $(y + b)/2$ ovat kokonaislukuja ja pisteiden (x, y) ja (a, b) välisen yhdysjanan keskipiste $((x + a)/2, (y + b)/2)$ on kokonaispiste. $\square$

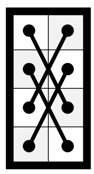
(c) Ongelma: Kuinka monta hevosta voidaan sijoittaa yht'aikaa shakkilaudan eri ruuduille ilman, että mitkään kaksi niistä uhkaavat toisiaan.

Ratkaisu: Sovimme, että "ruutu (i,j)" tarkoittaa ruutujen muodostaman i:nnen "vaakarivin" ja j:nnen "pystyrivin" leikkausruutua. Tällöin ruutuihin (i,j) ja (k,l) sijoitetut hevoset uhkaavat toisiaan jos ja vain jos on voimassa $|i-k|\cdot|j-l| = 2$, toisin sanoen, jos ja vain jos yhdestä ruudusta voi siirtyä toiseen kulkemalla ensin kaksi "askelta" vaakasuoraan ja sen jälkeen yhden "askeleen" pystysuoraan tai kulkemalla ensin kaksi "askelta" pystysuoraan ja sen jälkeen yhden "askeleen" vaakasuoraan. Alla vasemmanpuoleisessa kuvassa näkyy, miten yhteen shakkilaudan "sisäruutuun" sijoitettu hevonen voi "hypätä".

Jos kahteen eri ruutuun sijoitetut hevoset uhkaavat toisiaan, niin ne ovat eri värisissä ruuduissa (katso kuvaa). Täten, sijoittamalla jokaiseen valkoiseen ruutuun hevonen, saadaan laudalle sijoitettua 32 hevosta niin, etteivät mitkään kaksi uhkaa toisiaan; osoitetaan, ettei tällä tavalla voida sijoittaa 33 hevosta. Jaetaan laudan ruudukko alla keskimmäisen kuvan mukaisesti kahdeksaan laatikkoon ja pannaan merkille, ettei mihinkään laatikkoon voi sijoittaa viittä hevosta ilman, että jotkut kaksi niistä uhkaisivat toisiaan. Tämä seuraa siitä, että kukin laatikko jakautuu oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti neljään pienempään "laatikkoon", joista kuhunkin mahtuu sallitussa sijoittelussa vain yksi hevonen; täten isompaan laatikkoon mahtuu tavallisen laatikkoperiaatteen nojalla korkeintaan neljä hevosta. Koska laatikoita on kahdeksan kappaletta, yleistetty laatikkoperiaate osoittaa, että shakkilaudalle mahtuu toisiaan uhkaamattomia hevosia korkeintaan 32 kappaletta.







II 2. Summan ja erotuksen periaate.

Lauseen I 2.10 nojalla äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukko on äärellinen ja Lauseen I 2.11 tulos antaa yksinkertaisen summalausekkeen yhdistysjoukon alkioiden lukumäärälle siinä tapauksessa, että joukot ovat keskenään erillisiä. Johdamme nyt yhdistysjoukon koolle lausekkeen, joka pätee myös silloin kun joukot leikkaavat toisiaan. Kahden joukon tapauksessa saamme seuraavan tuloksen.

II 2.1 Lemma *Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Todistus. On voimassa $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ja tästä seuraa Korollaarin I 2.13 nojalla, koska joukot A ja $B \setminus A$ ovat äärellisiä ja $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, että $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$. Koska $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ ja $A \cap B \subset B$, niin Korollaarin I 2.14 nojalla on voimassa $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$. Näinollen on voimassa

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B| . \qquad \square$$

Yleistämme nyt edellisen lauseen tuloksen koskemaan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistystä. Todistamme ensin seuraavan aputuloksen.

II 2.2 Lemma *Olkoon A epätyhjä äärellinen joukko. Merkitsemme* $\mathcal{E}(A) = \{B \subset A : \text{luku } |B| \text{ on parillinen}\}$ *ja* $\mathcal{O}(A) = \{B \subset A : \text{luku } |B| \text{ on pariton}\}$. *Tällöin joukot $\mathcal{E}(A)$ ja $\mathcal{O}(A)$ ovat äärellisiä ja* $|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{O}(A)|$.

Todistus. Käytämme induktiota luvun $|A|$ suhteen. Olkoon a_0 joukon A alkio.

Jos $A = \{a_0\}$, niin $\mathcal{E}(A) = \{\emptyset\}$ ja $\mathcal{O}(A) = \{A\}$, joten väite pitää paikkansa. Oletamme, että on voimassa $|A| > 1$ ja että olemme jo todistaneet väitteen joukoille, joissa on $|A| - 1$ alkiota. Merkitsemme $\bar{A} = A \setminus \{a_0\}$. Tällöin $|\bar{A}| = |A| - 1$, joten väite pätee $\bar{A}$:lle ja joukot $\mathcal{E}(\bar{A})$ ja $\mathcal{O}(\bar{A})$ ovat äärellisiä. Määrittelemme kuvaukset $\psi_e : \mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{E}(A)$ ja $\psi_o : \mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{O}(A)$ seuraavasti.

$$\psi_e(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B| \in \mathcal{E}(\bar{A}) \\ B \cup \{a_0\} & \text{jos } |B| \in \mathcal{O}(\bar{A}) \end{cases} \qquad \psi_o(B) = \begin{cases} B & \text{jos } |B| \in \mathcal{O}(\bar{A}) \\ B \cup \{a_0\} & \text{jos } |B| \in \mathcal{E}(\bar{A}) \end{cases}$$

Voimme helposti tarkistaa, ψ_e on bijektio $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{E}(A)$ ja ψ_o on bijektio $\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A}) \to \mathcal{O}(A)$. Näin ollen on voimassa

$$|\mathcal{E}(A)| = |\mathcal{E}(\bar{A}) \cup \mathcal{O}(\bar{A})| = |\mathcal{O}(A)|. \qquad \square$$

Voimme panna merkille, että osa lemman tuloksesta on hyvin helppo todistaa siinä tapauksessa, että joukon A alkioiden lukumäärä on pariton: tällöin nimittäin kuvaus $\varphi : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{O}(A)$, missä $\varphi(B) = A \setminus B$, on bijektio.

Voimme ilmaista lemman tuloksen myös seuraavilla yhtälöillä:

$$\sum_{B \in \mathcal{E}(A)} 1 = \sum_{B \in \mathcal{O}(A)} 1 \text{ eli } \sum_{B \in \mathcal{E}(A)} 1 - \sum_{B \in \mathcal{O}(A)} 1 = 0 \text{ eli } \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|} = 0.$$

Panemme vielä merkille, että oikeanpuoleinen yhtälö voidaan saattaa seuraavaan muotoon:

$$\sum_{\emptyset \neq B \subset A} (-1)^{|B|+1} = 1\,. \tag{$*$}$$

Todistamme nyt viimeksi kirjoitetun yhtälön avulla tärkeän kaavan äärellisen monen äärellisen joukon yhdistysjoukon alkioiden lukumäärälle.

II 2.3 Lause *(Summa– ja erotusperiaate) Olkoon I äärellinen joukko ja olkoon A_i äärellinen joukko jokaisella $i \in I$. Tällöin joukko $\bigcup_{i \in I} A_i$ on äärellinen ja*

$$\boxed{\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (-1)^{|J|+1} \Big|\bigcap_{j \in J} A_j\Big|}$$

Todistus. Merkitsemme $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Haluamme laskea joukon A koon. Jokaisella $x \in A$ merkitsemme $I_x = \{i \in I : x \in A_i\}$ ja panemme merkille, että $I_x \neq \emptyset$.

Yhtälön $(*)$ nojalla on voimassa

$$|A| = \sum_{x \in A} 1 = \sum_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq K \subset I_x} (-1)^{|K|+1}.$$

Ryhmittelemme viimeisessä summassa termit uudelleen kokoamalla jokaisella $\emptyset \neq J \subset I$ yhteen ne termit, jotka vastaavat joukkoa J; panemme merkille, että jokaisella $x \in A$ on voimassa $J \subset I_x$ täsmälleen silloin kun on voimassa $x \in \bigcap_{i \in J} A_i$. Jokaisella $\emptyset \neq J \subset I$ merkitsemme $A_J = \bigcap_{i \in J} A_i$. Tällöin on voimassa

$$\sum_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq K \subset I_x} (-1)^{|K|+1} = \sum_{\emptyset \neq J \subset I} \sum_{x \in A_J} (-1)^{|J|+1}.$$

Saamme nyt halutun lausekkeen joukon A koolle, sillä on voimassa

$$\sum_{\emptyset\neq J\subset I}\ \sum_{x\in A_J}(-1)^{|J|+1}=\sum_{\emptyset\neq J\subset I}(-1)^{|J|+1}\sum_{x\in A_J}1=\sum_{\emptyset\neq J\subset I}(-1)^{|J|+1}|A_J|. \qquad \square$$

Annamme nyt eräitä esimerkkejä summa– ja erotusperiaatteen käytöstä.

II 2.4 Esimerkkejä **(a)** $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

(b) $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

(c) Ongelma. On maalattava nelinurkkaisen huoneen seinät, kukin seinä yksiväriseksi. Kuinka monella eri tavalla tämä voidaan tehdä, kun on käytettävissä neljää eriväristä maalia ja vaaditaan, että mitään kahta vierekkäistä seinää ei saa maalata samanvärisiksi?

Ratkaisu. Olkoot maalien värit vaikkapa **p**unainen, **v**alkoinen, **k**eltainen ja **s**ininen. Olkoot seinät $s_1,...,s_4$, missä vierekkäisiä ovat s_1 ja s_2, s_2 ja s_3, s_3 ja s_4 sekä s_4 ja s_1. Merkitään $4^*=1$ ja jokaisella $i\in[3]$, $i^*=i+1$. Jokaisella $i\in[4]$ merkitään $E_i=\{i,i^*\}$. Mielivaltainen väritys väreillä $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{s}$ voidaan esittää jonona $(x_1,...,x_4)$, missä jokaisella $i\in[4]$, $x_i\in\{\mathbf{p},\mathbf{v},\mathbf{k},\mathbf{s}\}$ on seinän s_i saama väri; jono $(x_1,...,x_4)$ esittää "sallittua" väritystä, mikäli jokaisella $i\in[4]$ on voimassa $x_i\neq x_{i^*}$; muussa tapauksessa jono esittää "kiellettyä" väritystä.

Lasketaan summa– ja erotusperiaatteen avulla kiellettyjen väritysten lukumäärä. Merkitään V:llä kaikkien väritysten joukkoa ja K:lla kiellettyjen väritysten joukkoa. Jokaisella $i\in[4]$ merkitään K_i:llä joukkoa $\{(x_1,...,x_4)\in V : x_i=x_{i^*}\}$. Tällöin $K=\bigcup_{i=1}^4 K_i$. Summa– ja erotusperiaatteen nojalla on voimassa

$$|K|=\sum_{\emptyset\neq J\subset[4]}(-1)^{|J|+1}\Big|\bigcap_{i\in J}K_i\Big|. \qquad (*)$$

Jokaisella $i\in[4]$ on voimassa $|K_i|=4^3$, koska joukkoon K_i kuuluvissa värityksissä seinien s_i ja s_{i^*} yhteinen väri voidaan valita neljällä eri tavalla ja loput kaksi seinää voidaan värittää miten halutaan.

Olkoot i ja j joukon $[4]$ kaksi eri alkiota. Näytetään, että tällöin on voimassa $|K_i\cap K_j|=4^2$. Koska pätee, että $i\neq j$, niin on voimassa $E_i\neq E_j$ ja tästä seuraa, että $|E_i\cup E_j|\geq 3$. Tarkastellaan kahta eri tapausta. Oletetaan aluksi, että $E_i\cap E_j=\emptyset$. Tällöin $E_i\cup E_j=[4]$ ja joukkoon $K_i\cap K_j$ kuuluva väritys määräytyy seinien s_i

ja s_{i^*} yhteisen värin sekä seinien s_j ja s_{j^*} yhteisen värin valinnoilla; koska valinnat ovat toisistaan riippumattomia ja kumpikin niistä voidaan suorittaa neljällä tavalla, nähdään olevan voimassa $|K_i \cap K_j| = 4^2$. Oletetaan seuraavaksi, että $E_i \cap E_j \neq \emptyset$. Pannaan merkille, että tällöin on voimassa $|E_i \cup E_j| = 3$. Olkoon h joukon $[4] \setminus (E_i \cup E_j)$ ainoa alkio. Koska $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, joukkoon $K_i \cap K_j$ kuuluvassa värityksessä kolmelle seinälle s_k, $k \in E_i \cup E_j$, tulee sama väri. Neljäs seinä s_h voidaan värittää muiden seinien väristä riippumatta ja näinollen joukkoon $K_i \cap K_j$ kuuluvia värityksiä on tässäkin tapauksessa 4^2 kappaletta.

Joukon [4] 3–osajoukot ovat $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$ ja $\{2,3,4\}$. Olkoon J yksi näistä neljästä joukosta. Tällöin on voimassa $\bigcup_{j \in J} E_j = [4]$ ja joukolle J löytyy sellainen esitys $J = \{h, i, k\}$, että $E_h \cap E_i \neq \emptyset$ ja $E_i \cap E_k \neq \emptyset$; tästä seuraa, että joukkoon $\bigcap_{j \in J} K_j$ kuuluvat vain ne väritykset, joissa kaikki seinät ovat samanväriset. Edellisen nojalla jokaiselle 3–joukolle $J \subset [4]$ pätee, että $\left|\bigcap_{j \in J} K_j\right| = 4$. Koska yhdellä värillä tehdyt väritykset kuuluvat myös joukkoon $\bigcap_{i \in [4]} K_i$, on edellisen nojalla voimassa $\left|\bigcap_{i \in [4]} K_i\right| = 4$.

Edellisestä seuraa, että jokaisella $J \subset [4]$ luku $\left|\bigcap_{j \in J} K_j\right|$ riippuu vain joukon J alkioiden lukumäärästä. Koska joukolla [4] on täsmälleen kuusi 2–osajoukkoa, edellä esitetystä seuraa yhtälön (*) nojalla, että on voimassa

$$|K| = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 172.$$

Koska joukon V koko on 4^4, sallittujen väritysten lukumäärä on

$$|V \setminus K| = |V| - |K| = 256 - 172 = 84.$$

(d) Eulerin ϕ-funktio.

Otamme aluksi käyttöön eräitä aritmetiikkaan liittyviä merkintöjä.

Jos n ja k ovat luonnollisia lukuja, $k \neq 0$ ja jos $\frac{n}{k}$ on kokonaisluku, niin sanomme, että *luku k jakaa luvun n* tai *luku k on luvun n tekijä* ja merkitsemme $k|n$.

Jos I on äärellinen joukko ja $a_i \in \mathbb{R}$ jokaisella $i \in I$, niin merkitsemme symbolilla $\Pi_{i \in I} a_i$ lukujen a_i, $i \in I$ tuloa; jos tässä $I = [n]$, niin käytämme kyseiselle tulolle toisinaan myös perinteisempää merkintää $a_1 \cdots a_n$

Sanomme, että luonnolliset luvut n ja k ovat *keskenään jaottomat*, jos $\mathrm{syt}(n,k) = 1$ (eli jos n:llä ja k:lla ei ole mitään ykköstä suurempaa yhteistä tekijää).

Määrittelemme kuvauksen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kaavalla

$$\boxed{\phi(n) = |\{k \in [n] : k \text{ ja } n \text{ ovat keskenään jaottomat}\}|}$$

Johdamme lausekkeen $\phi(n)$:lle. Olkoot luvun n alkulukutekijät $p_1, ..., p_\ell$. Tällöin n ja k ovat keskenään jaolliset jos ja vain jos on olemassa sellainen $i \in [\ell]$, että $p_i|k$.

Merkitsemme $A_i = \{k \in [n] : p_i|k\}$ jokaisella $i \in [\ell]$. Panemme merkille, että $|A_i| = |\{1 \cdot p_i, 2 \cdot p_i, \ldots, \frac{n}{p_i} \cdot p_i\}| = \frac{n}{p_i}$. Jokaisella $I \subset [\ell]$ on voimassa $\bigcap_{i \in I} A_i = \{k \in [n] : \Pi_{i \in I} p_i | k\}$ ja näemme samoin kuin edellä, että $|\bigcap_{i \in I} A_i| = \frac{n}{\Pi_{i \in I} p_i}$.

Summa-ja erotusperiaatteen nojalla pätee, että

$$\bigcap_{i \in [\ell]} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subset [\ell]} (-1)^{|I|+1} |\bigcap_{i \in I} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subset [\ell]} (-1)^{|I|+1} \frac{n}{\Pi_{i \in I} p_i} .$$

Edellisen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \phi(n) &= |[n] \setminus \bigcup_{i \in [\ell]} A_i| = n - \sum_{\emptyset \neq I \subset [\ell]} (-1)^{|I|+1} \frac{n}{\Pi_{i \in I} p_i} \\ &= \sum_{I \subset [\ell]} (-1)^{|I|} \frac{n}{\Pi_{i \in I} p_i} = \frac{n}{p_1 \cdots p_\ell} \sum_{I \subset [\ell]} (-1)^{|I|} \Pi_{i \in [\ell] \setminus I} p_i . \end{aligned}$$

Kun tarkastelemme summaa $\sum_{I \subset [\ell]} (-1)^{|I|} \Pi_{i \in [\ell] \setminus I} p_i$, niin huomaamme, että se on tulon $(p_1 - 1) \cdots (p_\ell - 1)$ aukikehitetty muoto. Täten saamme $\phi(n)$:lle seuraavan lausekkeen

$$\boxed{\phi(n) = \frac{n}{p_1 \cdots p_\ell} (p_1 - 1) \cdots (p_\ell - 1)}$$

Edellisen lausekkeen avulla on helppo laskea lukujen $\phi(n)$ arvoja, kunhan ensin löydetään luvun n alkulukutekijät.

Esimerkiksi luku 3528 voidaan kirjoittaa muodossa $3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ ja näin ollen $\phi(3528) = \frac{3528}{2 \cdot 3 \cdot 7}(2-1)(3-1)(7-1) = 1008$. □

II 3. Jonojen, kuvausten ja osajoukkojen lukumäärät.

Tässä luvussa määritämme eräiden jonojen, kuvausten ja osajoukkojen muodostamien joukkojen alkioiden lukumäärät. Laskemme aluksi äärellisen monen äärellisen joukon karteesisen tulon koon.

Karteesisen tulon käsite yleistetään useammalle kuin kahdelle joukolle seuraavasti. Olkoon $n > 1$ luonnollinen luku ja olkoot $X_1, ..., X_n$ joukkoja. *Joukkojen $X_1, ..., X_n$ karteesinen tulo* on joukko

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in X_i \text{ jokaisella } i \in [n]\}.$$

II 3.1 Lause *Olkoon $m > 1$ luonnollinen luku ja olkoot $X_1, ..., X_m$ äärellisiä joukkoja. Tällöin joukko $X_1 \times \cdots \times X_m$ on äärellinen ja*

$$\boxed{|X_1 \times \cdots \times X_m| = |X_1| \cdots |X_m|}$$

Todistus. Jos $m = 2$, niin kyseessä on Lauseen I 2.16 tulos. Toisaalta, jokaiselle $m > 2$ ja kaikille $x_1, ..., x_m$ pätee, että $(x_1, ..., x_m) = ((x_1, ..., x_{m-1}), x_m)$ ja tästä seuraa, että jokaisella $2 < m \leq n$ on voimassa

$$X_1 \times \cdots \times X_m = (X_1 \times \cdots \times X_{m-1}) \times X_m.$$

Lauseen tulos seuraa näinollen Lauseen I 2.16 tuloksesta induktiolla luvun m suhteen (todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijan suoritettaviksi). $\square$

Jos jokaisella $i \in [n]$ on voimassa $X_i = X$, niin karteesisesta tulosta $X_1 \times \cdots \times X_n$ käytetään merkintää X^n. Pannaan merkille, että joukko X^n koostuu kaikista joukon X alkioiden muodostamista n:n pituisista jonoista. Joukko X^n voidaan vastaavasti määritellä myös n:n arvoilla 0 ja 1: tällöin on voimassa $X^0 = \{()\} = \{\emptyset\}$ ja $X^1 = \{(x) : x \in X\} = \{x : x \in X\} = X$. Sovimme myös, että $0^0 = 1$.

II 3.2 Korollaari *Olkoon X äärellinen joukko. Tällöin jokaisella $m \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\boxed{|X^m| = |X|^m}$$

Todistus. $\left|X^0\right| = |\{\emptyset\}| = 1 = |X|^0$ ja $\left|X^1\right| = |X| = |X|^1$. Luvuille $m > 1$ tulos seuraa Lauseesta II 3.1. $\square$

Palautamme mieliin, että annetun joukon X potenssijoukko on joukko $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Jos $k \in \mathbb{N}$, niin käytämme joukosta $\mathcal{P}([k])$ lyhennettyä merkintää $\mathcal{P}[k]$.

II 3.3 Lause *Olkoon X n–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|\mathcal{P}(X)| = 2^n}$$

Todistus. Esitetään joukko X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määritellään kuvaus $j : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^n$ merkitsemällä jokaisella $A \in \mathcal{P}(X)$, $j(A)$:lla sitä lukujen 0 ja 1 muodostamaa jonoa $(j_1, ..., j_n)$, jolle $j_k = 0$ jos $x_k \notin A$ ja $j_k = 1$ jos $x_k \in A$. Nähdään helposti, että kuvaus j on bijektio. Lauseen I 2.6 ja Korollaarin II 3.2 nojalla joukko $\mathcal{P}(X)$ on äärellinen ja $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}|^n = 2^n$. □

Kuvaus $a \mapsto \{a\}$ on jokaisella joukolla A injektio $A \to \mathcal{P}(A)$. Sen sijaan ei ole olemassa surjektiota $A \to \mathcal{P}(A)$:

II 3.4 Lause *Olkoon A joukko. Tällöin ei ole olemassa surjektiota $A \to \mathcal{P}(A)$.*

Todistus. Olkoon f kuvaus $A \to \mathcal{P}(A)$. Merkitään $X = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Näytetään, että $X \notin f(A)$. Olkoon a joukon A alkio. Jos $a \in X$, niin $a \notin f(a)$, joten $f(a) \neq X$. Jos taas $a \in A \setminus X$, niin $a \in f(a)$, joten jälleen $f(a) \neq X$. □

II 3.5 Korollaari *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $n < 2^n$.*

Todistus. Lauseet II 3.3, II 3.4 ja II 1.4. □

II 3.6 Esimerkki Jos A on joukon $[100]$ 10–osajoukko, niin on olemassa sellaiset A:n erilliset epätyhjät osajoukot B ja C, että joukon B alkioiden summa on sama kuin joukon C alkioiden summa.

Todistus. Koska $|A| = 10$, Lauseen II 3.3 nojalla on voimassa $|\mathcal{P}(A)| = 2^{10} = 1024$. Koska $A \subset [100]$, jokaisella $B \subset A$ on voimassa $\sum_{x \in B} x \leq 1000$. Laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa sellaiset $E \subset A$ ja $D \subset A$, että $E \neq D$ ja $\sum_{x \in E} x = \sum_{x \in D} x$. Merkitään $B = E \setminus (E \cap D)$ ja $C = D \setminus (E \cap D)$. Tällöin $B \cap C = \emptyset$ ja

$$\sum_{x \in B} x = \sum_{x \in E} x - \sum_{x \in E \cap D} x = \sum_{x \in D} x - \sum_{x \in E \cap D} x = \sum_{x \in C} x.$$

Koska $E \neq D$, niin joko $B \neq \emptyset$ tai $C \neq \emptyset$ ja näin ollen joko $\sum_{x \in B} x \neq 0$ tai $\sum_{x \in C} x \neq 0$; koska näillä summilla on sama arvo, on kumpikin summa arvoltaan nollasta poikkeava ja täten on voimassa $B \neq \emptyset$ ja $C \neq \emptyset$. □

Koska äärellisen joukon kaikkien osajoukkojen joukko on äärellinen, niin myös sen k-osajoukkojen joukko (missä $k \in \mathbb{N}$) on äärellinen. Joukon $[n]$ k–osajoukkojen lukumäärää merkitsemme symbolilla $\binom{n}{k}$. Annetun joukon X k-alkioisten osajoukkojen muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla $\mathcal{P}_k(X)$ (jos $X = [m]$, niin merkitsemme lyhyemmin $\mathcal{P}_k[m]$). Siis

$$\boxed{\binom{n}{k} \;=\; |\{A \in \mathcal{P}[n] : |A| = k\}| \;=\; |\mathcal{P}_k[n]|}$$

Panemme merkille, että $\binom{n}{k} = 0$ kun $k > 0$. Täydennämme lukujen $\binom{n}{k}$ määrittelyä asettamalla $\binom{n}{k} = 0$ kaikille $n, k \in \mathbb{Z}$, joilla $n < 0$ tai $k < 0$.

Selvästi $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, sillä joukolla on vain yksi tyhjä ja yksi täysi osajoukko. Samoin selvästi $\binom{n}{1} = n$. Toisaalta huomaamme helposti, että luvut $\binom{n}{k}$ ovat parametrin k suhteen *symmetrisiä*: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ kaikille $k \in [n]$. Tämä seuraa yksinkertaisesti siitä, että jokaista joukon $[n]$ k-osajoukkoa A vastaa yksikäsitteisesti sen komplementti $[n] \smallsetminus A$, joka on $(n-k)$-osajoukko. Koska luvut $\binom{n}{0}, \ldots, \binom{n}{n}$ luettelevat joukon $[n]$ *kaikkien* osajoukkojen lukumäärät, saamme Lauseen II 3.3 avulla seuraavan identiteetin:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \;=\; 2^n}$$

Pascalin identiteetin nimellä tunnettu palautuskaava ilmaisee luvut $\binom{n}{k}$ lukujen $\binom{n-1}{i}$ avulla seuraavasti.

II 3.7 Lause (Pascalin identiteetti) *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $k \in [n]$, $0 < k < n$. Tällöin*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Todistus. Määritellään $\phi : \mathcal{P}_k[n] \to \mathcal{P}_{k-1}[n-1] \cup \mathcal{P}_k[n-1]$ kaavalla $\phi(A) = A \smallsetminus \{n\}$. Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvaus ϕ on bijektio. $\square$

Pascalin palautuskaava antaa ns. *Pascalin kolmion*, jossa luvut $\binom{n}{k}$ on lueteltu palautuskaavan mukaisessa järjestyksessä. Seuraavassa kaaviossa luetellaan kyseisen kolmion seitsemän ensimmäistä riviä.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

(Mainittakoon, että Pascalin (1623 – 1662) kolmio julkaistiin Kiinassa v. 1303, ja se oli tunnettu jo aikaisemmin.)

Pienillä n:n arvoilla luvut $\binom{n}{k}$ voidaan etsiä täydentämällä Pascalin kolmiota, mutta suuremmille n:n arvoille tämä on liian työlästä. Teoreettisia tarkasteluja varten haluttaisiin joka tapauksessa selkeä lauseke luvuille $\binom{n}{k}$. Tällainen lauseke voidaankin antaa nk. *kertomafunktion* avulla. Palautetaan nyt mieliin kertomafunktion määritelmä. Luvun n *kertoma* $n!$ määritellään rekursiivisesti asettamalla $0! = 1$ ja $k! = ((k-1)!) \cdot k$ kun $k > 0$. Täten $1! = 1 \cdot 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 2 \cdot 3$ ja, yleisesti, jokaisella $n > 0$ on voimassa $n! = 1 \cdots n$.

II 3.8 Lause *Kaikille $n, k \in \mathbb{N}$, missä $k \leq n$, on voimassa*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Todistus. Todistetaan lause induktiolla luvun n suhteen. Koska $\binom{0}{0} = |\mathcal{P}_0(\emptyset)| = 1 = \frac{0!}{0!0!}$, väite pätee arvolla 0. Oletetaan nyt, että $n > 0$ on sellainen luonnollinen luku, että väite pätee arvolla $n-1$. Olkoon luvulle $k \in \mathbb{N}$ voimassa $k \leq n$. Osoitetaan, että $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Jos $k = 0$ tai $k = n$, niin kaava pätee, koska $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. Oletetaan, että $0 < k < n$. Pascalin identiteetin nojalla on voimassa $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ja induktio–oletuksen nojalla pätee, että $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ ja $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$; yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan luvulle $\binom{n}{k}$ lauseke

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Esimerkki (a) Olet täyttänyt lottokaavakkeesta yhden ruudukon eli merkinnyt rasteilla seitsemän lukua joukosta [39]. Lottoarvonnassa arvotaan joukon [39] seitsemän alkiota valitsemalla numeroilla 1,2,3,...,39 merkittyjen 39 pallon joukosta umpimähkään seitsemän palloa. Mikä on todennäköisyys, että valitsemasi numerot ovat samat kuin arvonnan antamat?

Ratkaisu: Arvonta määrää yhden alkion joukosta $\mathcal{P}_7[39]$. Koska joukon $\mathcal{P}_7[39]$ kaikkien alkioiden lukumäärä on

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7! \cdot 32!} = \frac{33 \cdot 34 \cdots 39}{1 \cdot 2 \cdots 7} = 15380937\,,$$

niin arvonnan "umpimähkäisyyden" nojalla todennäköisyys sille, että valintasi antoi "seitsemän oikein" on

$$\frac{1}{15380937}\,.$$

(b) Loton "järjestelmässä 10" voit merkitä ruudukkoon 10 rastia. Tuloksesi on "seitsemän oikein", jos kaikki arvotut "oikeat" numerot ovat valitsemiesi kymmenen joukossa. Haluamme selvittää, mitä järjestelmä 10 maksaa ja haluamme myös laskea, mikä on todennäköisyys saada järjestemän 10 avulla "seitsemän oikein".

Ratkaisu: Merkitsemiesi 10 rastin joukko sisältää $\binom{10}{7}$ 7-osajoukkoa. Koska $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120$ ja koska yhden 7-rastikon hinta on yksi euro, niin joudut maksamaan järjestelmästä 120€.

Koska 10-rastikko joukko sisältää 120 7-rastikkoa ja koska 7-rastikkoja on (a)-kohdan nojalla kaikkiaan 15380937 kappaletta, niin etsitty todennäköisyys on

$$\frac{120}{15380937} \sim \frac{1}{128000}\,.$$

Huomaa, että voit päätellä myös seuraavasti: "Oikeita" 10-rastikkoja on $\binom{32}{3}$ kappaletta ("oikea" 7-rastikko ja kolme lopuista 32 mahdollisuudesta). Kaikkia 10-rastikkoja on $\binom{39}{10}$ kappaletta. Etsitty todennäköisyys on siis $\binom{32}{3}\Big/\binom{39}{10}$. Tarkista, että myös viimeisen lausekkeen arvo on $\frac{120}{15380937}$. $\square$

Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*, sillä ne esiintyvät aukikehitetyn polynomin $(x+y)^n$ termien $x^k y^{n-k}$ kertoimina.

II 3.9 (Binomilause) Lause *Kaikilla* $n \in \mathbb{N}$ *ja* $x, y \in \mathbb{R}$ *on voimassa*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

Todistus. Harjoitustehtävä [Ohje: induktio n:n suhteen ja Pascalin identiteetti]. $\square$

Esimerkki: Laske termin x^6 kerroin polynomissa $(1+x)^8$.

Ratkaisu: Binomikaavan nojalla

$$(1+x)^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{n}{i} 1^i x^{8-i},$$

joten termin x^6 kerroin on

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28\,. \qquad \square$$

Binomilause antaa helpon todistuksen Lemman II 2.2 tulokselle. Olkoon $n > 0$. Kun sijoitamme lauseessa $x = -1$ ja $y = 1$, niin saamme yhtälön $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$. Siirtämällä negatiiviset termit yhtälön oikealle puolelle saamme yhtälön muotoon

$$\sum_{i \leq n \text{ ja } n \text{ on parillinen}} \binom{n}{i} = \sum_{i \leq n \text{ ja } n \text{ on pariton}} \binom{n}{i}.$$

Tämä yhtälö ilmaisee sen tuloksen, että kun $n > 0$, niin n-joukolla on yhtä monta parillisalkioista osajoukkoa kuin paritonalkioista osajoukkoa.

Laskemme seuraavaksi kahden äärellisen joukon välisten kuvausten lukumäärän; laskemme myös bijektioiden, injektioiden ja surjektioiden lukumäärät.

Olkoot X ja Y joukkoja. Merkitsemme

$$K(X,Y) = \{f : f \text{ on kuvaus } X \to Y\}\,,$$

$$B(X,Y) = \{f : f \text{ on bijektio } X \to Y\}\,,$$

$$I(X,Y) = \{f : f \text{ on injektio } X \to Y\}\,,$$

$$S(X,Y) = \{f : f \text{ on surjektio } X \to Y\}\,.$$

II 3.10 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|K(X,Y)| = k^n}$$

Todistus. Esitetään joukko X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määritellään kuvaus $\varphi : K(X,Y) \to Y^n$ asettamalla $\varphi(f) = (f(x_1), ..., f(x_n)) \in Y^n$ jokaisella $f \in K(X,Y)$. Kuvaus φ on injektio, koska jokaisella $f \in K(X,Y)$ alkiot $f(x_1), ..., f(x_n)$ määräävät kuvauksen f. Kuvaus φ on surjektio, sillä jokaisella $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$, jos f on kuvaus $x_i \mapsto y_i$, niin tällöin on voimassa $\varphi(f) = (y_1, ..., y_n)$. Täten φ on bijektio ja Lauseen I 2.6 ja Korollaarin II 3.2 nojalla pätee, että $|K(X,Y)| = |Y|^n$. □

II 3.11 Lause *Jos X ja Y ovat n–joukkoja, niin*

$$\boxed{|B(X,Y)| = n!}$$

Todistus. Käytetään induktiota luvun n suhteen.

Jos $n = 0$, niin tällöin $X = Y = \emptyset$; tässä tapauksessa on voimassa $B(X,Y) = \{\emptyset\}$ ja näinollen $|B(X,Y)| = 1 = 0!$

Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luku, että väite pätee luvulle $n-1$. Olkoon a joukon X alkio. Merkitään jokaisella $y \in Y$,

$$B_y = \{f \in B(X,Y) : f(a) = y\}.$$

Pannaan merkille, että $B(X,Y) = \bigcup_{y \in Y} B_y$. Koska joukon $B(X,Y)$ alkiot ovat kuvauksia, niin joukot B_y, $y \in Y$, ovat keskenään erillisiä. Täten on voimassa $|B(X,Y)| = \Sigma_{y \in Y} |B_y|$.

Osoitetaan, että jokaisella $y \in Y$ on voimassa $|B_y| = (n-1)!$ Olkoon y joukon Y alkio. Merkitään $Z = X \setminus \{a\}$ ja $V = Y \setminus \{y\}$. Koska $|Z| = |V| = n-1$, niin induktio–oletuksen nojalla pätee, että $|B(Z,V)| = (n-1)!$ Nähdään helposti, että kaava $\varphi(g) = g \cup \{(a,y)\}$ määrittelee kuvauksen $\varphi : B(Z,V) \to B_y$. Kuvaus φ on bijektio, koska sillä on käänteiskuvaus $\psi : B_y \to B(Z,V)$, missä $\psi(f) = f|Z$. Edellisen nojalla pätee, että $|B_y| = |B(Z,V)| = (n-1)!$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|B(X,Y)| = \Sigma_{y \in Y} |B_y| = \Sigma_{y \in Y} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \qquad \square$$

Yllä annetussa todistuksessa on esitetty täsmällisempi formulointi seuraavalle havainnolliselle "todistukselle". Esitetään X muodossa $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Määrättäessä bijektiota $f : X \to Y$, $f(x_1)$:ksi voidaan valita mikä tahansa n:stä Y:n alkiosta, $f(x_2)$:ksi mikä tahansa joukon $Y \setminus \{f(x_1)\}$ $n-1$:stä alkiosta,..., ja viimein $f(x_n)$:ksi voidaan valita mikä tahansa joukon $Y \setminus \{f(x_1), ..., f(x_{n-1})\}$ 1:stä alkiosta. Täten bijektio voidaan muodostaa $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ eri tavalla.

Esimerkki Laske kuinka monella eri tavalla voidaan shakkilaudan eri ruuduille sijoittaa kahdeksan tornia kun vaaditaan, etteivät mitkään kaksi tornia uhkaa toisiaan (katso Esimerkkiä II 1.6.(c)).

Ratkaisu: Voimme esittää kahdeksan tornin sijoittelun kahdeksanalkioisena joukkona $S \subset [8] \times [8]$ kun sovimme, että alkion (i, j) mukanaolo joukossa S merkitsee sitä, että i:nnen "vaakarivin" ja j:nnen "pystyrivin" leikkausruutuun on sijoitettu yksi torni. Selvästikin kahteen eri sijoitteluun liittyvät joukot eroavat toisistaan. Täten "sallittujen" sijoittelujen lukumäärän laskemiseksi voidaan määrittää niihin liittyvien joukkojen lukumäärä.

Kahdeksan tornin sijoittelu toteuttaa vaaditun ehdon, että mitkään kaksi tornia eivät uhkaa toisiaan, jos ja vain jos millään ruutujen muodostamalla vaakarivillä ei ole kahta tornia eikä millään pystyrivillä ole kahta tornia; sijoitteluun liittyvän joukon S avulla ilmaistuna kyseinen ehto voidaan ilmaista seuraavasti: jos (i, j) ja (k, l) ovat joukon S kaksi eri alkiota, niin on oltava voimassa $i \neq k$ ja $j \neq l$. Jos tarkastelemme joukkoa S joukon [8] relaationa, niin ehto $(i, j) \neq (k, l) \Rightarrow i \neq j$ merkitsee sitä, että S:n on oltava kuvaus ja ehto $(i, j) \neq (k, l) \Rightarrow j \neq l$ merkitsee sitä, että kuvauksen S on oltava injektio. Vaatimus, että kuvaus S on joukon $[8] \times [8]$ kahdeksanalkioinen osajoukko merkitsee sitä, että S:n on oltava kuvaus $[8] \to [8]$; injektio $S : [8] \to [8]$ on välttämättä bijektio.

Olemme osoittaneet, että jos sijoittelu täyttää vaaditun ehdon, niin siihen liittyvä joukko on bijektio $[8] \to [8]$; toisaalta näemme helposti, että jokaiseen bijektioon $[8] \to [8]$ liittyvä sijoittelu toteuttaa vaaditun ehdon. Näin ollen sallittujen sijoittelujen lukumäärä on sama kuin joukon $B([8], [8])$ koko eli $8! = 40320$. □

II 3.12 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Oletamme, että $n \leq k$. Tällöin*

$$\boxed{|I(X, Y)| = \frac{k!}{(k-n)!}}$$

Todistus. Kun $f \in I(X,Y)$, niin f on bijektio $X \to f(X)$, joten on voimassa $f(X) \in \mathcal{P}_n(Y)$. Merkitsemme jokaisella $A \in \mathcal{P}_n(Y)$, $I_A = \{f \in I(X,Y) : f(X) = A\}$; panemme merkille, että on voimassa $I_A = B(X,A)$, joten edellisen lauseen tuloksesta seuraa, että $|I_A| = n!$ Joukot I_A, $A \in \mathcal{P}_n(Y)$, ovat erillisiä ja on voimassa $I(X,Y) = \bigcup_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} I_A$; tästä seuraa, että on voimassa

$$|I(X,Y)| = \sum_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} |I_A| = \sum_{A\in\mathcal{P}_n(Y)} n! = |\mathcal{P}_n(Y)| \cdot n!$$

Koska Lauseen II 3.8 nojalla pätee, että $|\mathcal{P}_n(Y)| = \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$, saamme luvulle $|I(X,Y)|$ halutun lausekkeen

$$|I(X,Y)| = |\mathcal{P}_n(Y)| \cdot n! = \frac{k!}{n!(k-n)!} \cdot n! = \frac{k!}{(k-n)!}. \qquad \square$$

Laskemme lopuksi kahden äärellisen joukon välisten surjektioiden lukumäärän.

II 3.13 Lause *Olkoon X n–joukko ja Y k–joukko. Tällöin*

$$\boxed{|S(X,Y)| = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n}$$

Todistus. Todistamme lauseen summa– ja erotusperiaatteen avulla. Merkitsemme jokaisella $y \in Y$, $F_y = \{f \in K(X,Y) : y \notin f(X)\}$. Tällöin $S(X,Y) = K(X,Y) \setminus \bigcup_{y\in Y} F_y$. Jokaisella $A \subset Y$ on voimassa $\bigcap_{y\in A} F_y = \{f \in K(X,Y) : f(X) \cap A = \emptyset\}$; tästä seuraa, että $\bigcap_{y\in A} F_y = K(X, Y \setminus A)$ ja edelleen, Lauseen II 3.10 nojalla, että $\left|\bigcap_{y\in A} F_y\right| = (k - |A|)^n$. Edellä esitetystä seuraa summa– ja erotusperiaatteen nojalla, että on voimassa

$$\left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right| = \sum_{\emptyset\neq A\subset Y} (-1)^{|A|+1} \left|\bigcap_{y\in A} F_y\right| = \sum_{\emptyset\neq A\subset Y} (-1)^{|A|+1} (k - |A|)^n .$$

Ryhmittelemällä summan termejä, saamme viimeisen lausekkeen esitettyä muodossa $\sum_{i=1}^{k} \sum_{A\in\mathcal{P}_i(Y)} (-1)^{i+1}(k-i)^n$. Koska jokaisella $i \in [k]$ on voimassa $|\mathcal{P}_i(Y)| = \binom{k}{i}$, saamme yhtälön $\sum_{i=1}^{k} \sum_{A\in\mathcal{P}_i(Y)} (-1)^{i+1}(k-i)^n = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa $\left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\binom{k}{i}(k-i)^n$. Näinollen pätee, että

$$|S(X,Y)| = |K(X,Y)| - \left|\bigcup_{y\in Y} F_y\right| = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

$\square$

II 3.14 Korollaari *Jos n ja k ovat luonnollisia lukuja ja $n < k$, niin tällöin on voimassa*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = 0 = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^n.$$

Todistus. Olkoon siis voimassa $n < k$. Lauseen II 1.4 nojalla pätee, että $S([n],[k]) = \emptyset$ ja tästä seuraa Lauseen II 3.13 nojalla, että on voimassa

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = 0. \qquad (*)$$

Koska jokaisella $0 \le i \le k$ on voimassa $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$ ja $(-1)^{k-i} = (-1)^k(-1)^i$, niin yhtälöstä (*) seuraa yhtälö $(-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{k-i}(k-i)^n = 0.$ ja tästä seuraa sijoituksella $j = k - i$ yhtälö $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^n = 0.$ □

Kaikkien surjektioiden $[n] \to [k]$ lukumäärän ohella on monissa tilanteissa tarpeen tietää myös sellaisten surjektioiden $f : [n] \to [k]$ lukumäärä, joilla alkukuvien $f^{-1}(i)$, $i \in [k]$, koot on ennalta annettu. Voimme ilmaista tällaiset lukumäärät nk. *multinomikertoimien* avulla. Nämä kertoimet määritellään seuraavasti: kun n ja $j_1, ..., j_k$ ovat sellaisia luonnollisia lukuja, että $j_1 + \cdots + j_k = n$, niin asetetaan

$$\binom{n}{j_1 \cdots j_k} = \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdots j_k!}.$$

Multinomikertoimet yleistävät binomikertoimia, sillä voimme esittää binomikertoimen $\binom{n}{j}$ multinomikertoimena muodossa $\binom{n}{j\; n-j}$. Toisaalta voimme palauttaa multinomikertoimet binomikertoimiin seuraavan palautuskaavan avulla.

II 3.15 Lemma *Kun luonnollisille luvuille n ja $j_1, ..., j_k$ on voimassa $k > 1$ ja $j_1 + \cdots + j_k = n$, niin*

$$\binom{n}{j_1 \cdots j_k} = \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2 \cdots j_k} = \binom{n-j_k}{j_1 \cdots j_{k-1}}\binom{n}{j_k}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Palautuskaavan avulla voimme helposti todistaa seuraavan tuloksen, jolla on paljon käyttöä kombinatoriikassa.

II 3.16 Lause *Olkoon X n-joukko ja olkoon luonnollisille luvuille $j_1, ..., j_k$ voimassa $j_1 + \cdots + j_k = n$. Tällöin*

$$\boxed{\left|\left\{f : f \text{ on kuvaus } X \to [k] \text{ ja } |f^{-1}\{i\}| = j_i \text{ jokaisella } i \in [k]\right\}\right| = \binom{n}{j_1 \cdots j_k}}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lauseessa esiintyvään joukkoon kuuluvat kuvaukset ovat kaikki surjektioita jos ja vain jos $j_i > 0$ jokaisella $i \in [k]$.

II 3.17 Esimerkki Montako eri sanaa voidaan muodostaa sanan RAIVORAITTIIT kirjaimista järjestelemällä ne uudelleen?

Ratkaisu: Sanat voidaan esittää 13-jonoina eli (oleellisesti) kuvauksina $[13] \to \{\mathrm{A,I,O,R,T,V}\}$. Sanan on sisällettävä neljä I:tä, kolme T:tä, kaksi A:ta ja R:ää sekä yksi O ja V. Halutunlainen kuvaus $f : [13] \to \{\mathrm{A,I,O,R,T,V}\}$ toteuttaa siis ehdot $|f^{-1}\{\mathrm{I}\}| = 4$, $|f^{-1}\{\mathrm{T}\}| = 3$, $|f^{-1}\{\mathrm{A}\}| = |f^{-1}\{\mathrm{R}\}| = 2$ ja $|f^{-1}\{\mathrm{O}\}| = |f^{-1}\{\mathrm{V}\}| = 1$; tällaisten kuvausten lukumäärä on

$$\binom{13}{4\,3\,2\,2\,1\,1} = \frac{13!}{4!3!2!2!1!1!} = 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 10810800\,.$$ □

II 4. Ositusten lukumäärät.

Ryhdymme nyt tarkastelemaan äärellisen joukon ositusten lukumääriä. Olkoon A n–joukko ja olkoon $\mathcal{O}$ joukon A ositus. Koska on olemassa surjektio $A \to \mathcal{O}$, niin Lauseen II 1.3 tuloksesta seuraa, että $|\mathcal{O}| \le n$.

Kun $\mathcal{O}$ on joukon A ositus, niin $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(A)$ eli $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; täten joukolla A on Lauseen II 2.3 nojalla korkeintaan 2^{2^n} ositusta. Tarkastellaan nyt vähän lähemmin äärellisen joukon ositusten lukumäärää. Tarkastelussa voidaan rajoittua joukkoihin $[n]$, $n \in \mathbb{N}$, ja niiden osituksiin. Hyvin pienillä n:n arvoilla voidaan helposti luetella joukon $[n]$ ositukset ja laskea niiden lukumäärä:

n	$[n]$	ositukset	lkm
0	$\emptyset$	$\emptyset$	1
1	$\{1\}$	$\{\{1\}\}$	1
2	$\{1,2\}$	$\{\{1,2\}\}$ $\{\{1\},\{2\}\}$	2
3	$\{1,2,3\}$	$\{\{1,2,3\}\}$ $\{\{1,2\},\{3\}\}$ $\{\{1,3\},\{2\}\}$ $\{\{2,3\},\{1\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	5

Olkoon n luonnollinen luku. Merkitsemme $\mathbb{O}_n$:llä joukon $[n]$ kaikkien ositusten muodostamaa joukkoa ja merkitsemme $S(n)$:llä lukua $|\mathbb{O}_n|$. Merkitsemme edelleen jokaisella $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{O}_{n,k} = \{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_n : |\mathcal{O}| = k\}$ ja $S(n,k) = |\mathbb{O}_{n,k}|$. Kutsumme lukuja $S(n,k)$ *(toisen luokan) Stirlingin luvuiksi.* Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $S(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$.

II 4.1 Lause *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n}$$

Todistus. Merkitään jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$, $F(\mathcal{O}) = \{f \in S([n],[k]) : \mathcal{O}_f = \mathcal{O}\}$. Pannaan merkille, että jokaisella $f \in S([n],[k])$ on voimassa $\mathcal{O}_f \in \mathbb{O}_{n,k}$ ja $f \in F(\mathcal{O}_f)$. Edellisen nojalla pätee, että $\bigcup_{\mathcal{O}\in\mathbb{O}_{n,k}} F(\mathcal{O}) = S([n],[k])$. Koska joukot $F(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$, ovat keskenään erillisiä, on voimassa $|S([n],[k])| = \sum_{\mathcal{O}\in\mathbb{O}_{n,k}} |F(\mathcal{O})|$.

Osoitetaan, että jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}$ on voimassa $|F(\mathcal{O})| = k!$ Olkoon $\mathcal{O}$ perheen $\mathbb{O}_{n,k}$ jäsen. Merkitään g:llä kanoonista surjektiota $[n] \to \mathcal{O}$. Pannaan merkille, että kun φ on bijektio $\mathcal{O} \to [k]$, niin tällöin kuvaus $f = \varphi \circ g$ on surjektio $[n] \to [k]$ ja on voimassa

$$\mathcal{O}_f = \{f^{-1}\{i\} : i \in [k]\} = \{g^{-1}\left(\varphi^{-1}\{i\}\right) : i \in [k]\} = \{g^{-1}\{O\} : O \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O}.$$

Edellisen nojalla muotoa $\varphi \circ g$, missä $\varphi \in B(\mathcal{O},[k])$, olevat kuvaukset kuuluvat joukkoon $F(\mathcal{O})$; osoitetaan, että kaikki joukon $F(\mathcal{O})$ kuvaukset voidaan esittää tässä muodossa. Olkoon f joukon $F(\mathcal{O})$ alkio. Merkitään ψ:llä relaatiota $f \circ g^{-1} \subset [k] \times \mathcal{O}$. Relaatio ψ on kuvaus $\mathcal{O} \to [k]$, sillä jokaisella $O \in \mathcal{O}$ on voimassa $\psi\{O\} = f\left(g^{-1}\{O\}\right) = f(O)$ ja joukossa $f(O)$ on täsmälleen yksi alkio, koska

$O \in \mathcal{O} = \mathcal{O}_f$. Kuvauksen f surjektiivisuudesta seuraa, että kuvaus ψ on surjektio ja tästä seuraa Lauseen II 1.3 nojalla, että ψ on bijektio. Lisäksi on voimassa $\psi \circ g = f$, sillä jokaisella $j \in [n]$ on voimassa $\psi(g\{j\}) = f(g^{-1}(g\{j\})) \supset f\{j\}$ ja täten $\psi(g(j)) = f(j)$. On osoitettu, että $F(\mathcal{O}) = \{\varphi \circ g : \varphi \in B(\mathcal{O}, [k])\}$. Kuvaus $\varphi \mapsto \varphi \circ g$ on bijektio $B(\mathcal{O}, [k]) \to F(\mathcal{O})$, sillä jos φ ja ψ ovat sellaisia joukon $B(\mathcal{O}, [k])$ alkioita, että $\varphi \circ g = \psi \circ g$, niin tällöin on voimassa $\varphi \circ (g \circ g^{-1}) = \psi \circ (g \circ g^{-1})$ ja tästä seuraa, että $\varphi = \psi$, koska $g \circ g^{-1}$ on joukon $\mathcal{O}$ identtinen kuvaus. Edellisen nojalla on voimassa $|F(\mathcal{O})| = |B(\mathcal{O}, [k])|$ ja tästä seuraa Korollaarin II 3.9 nojalla, että $|F(\mathcal{O})| = k!$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|S([n],[k])| = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} |F(\mathcal{O})| = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k}} k! = k!\,|\mathbb{O}_{n,k}|$$

ja tästä seuraa lauseen tulos Lauseen II 3.13 nojalla. □

Korollaari *Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa*

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Käytännössä lukuja $S(n,k)$ on hankala laskea Lauseen II 4.1 antaman lausekkeen avulla. Pienillä n:n arvoilla nämä luvut voidaan helposti määrätä seuraavan rekursioyhtälön avulla.

II 4.2 Lause *Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $S(n,1) = S(n,n) = 1$ ja jokaisella $1 < k < n$ on voimassa*

$$\boxed{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)\,.}$$

Todistus. Nähdään helposti, että $\mathbb{O}_{n,1} = \{\{[n]\}\}$ ja $\mathbb{O}_{n,n} = \{\{\{i\} : i \in [n]\}\}$. Täten $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

Olkoon k luonnollinen luku $1 < k < n$. Merkitään $\mathbb{O} = \{\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k} : \{n\} \in \mathcal{O}\}$ ja $\mathbb{P} = \mathbb{O}_{n,k} \smallsetminus \mathbb{O}$. Lauseen todistamiseksi osoitetaan, että $|\mathbb{O}| = |\mathbb{O}_{n-1,k-1}|$ ja $|\mathbb{P}| = k \cdot |\mathbb{O}_{n-1,k}|$.

Jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$, perhe $\mathcal{Q} \smallsetminus \{\{n\}\}$ on joukon $[n-1] = [n] \smallsetminus \{n\}$ $k-1$-osainen ositus. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{O} \to \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ asettamalla jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$,

$f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \smallsetminus \{\{n\}\}$ ja määritellään kuvaus $g : \mathbb{O}_{n-1,k-1} \to \mathbb{O}$ asettamalla jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ $g(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cup \{\{n\}\}$. Tällöin jokaisella $\mathcal{Q} \in \mathbb{O}$ on voimassa $g(f(\mathcal{Q})) = \mathcal{Q}$ ja jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k-1}$ on voimassa $f(g(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$. Täten kuvaukset f ja g ovat toistensa käänteiskuvauksia ja näin ollen ne ovat bijektioita. Koska on olemassa bijektio $\mathbb{O} \to \mathbb{O}_{n-1,k-1}$, on voimassa $|\mathbb{O}| = |\mathbb{O}_{n-1,k-1}|$.

Määritellään kuvaus $h : \mathbb{P} \to \mathbb{O}_{n-1,k}$ asettamalla $h(\mathcal{R}) = \{R \smallsetminus \{n\} : R \in \mathcal{R}\}$ jokaisella $\mathcal{R} \in \mathbb{P}$. Jokaisella $\mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k}$ on voimassa

$$h^{-1}\{\mathcal{O}\} = \{(\mathcal{O} \smallsetminus \{O\}) \cup \{O \cup \{n\}\} : O \in \mathcal{O}\}$$

ja näin ollen $\left|h^{-1}\{\mathcal{O}\}\right| = |\mathcal{O}| = k$. Koska $\mathbb{P} = \bigcup\{h^{-1}\{\mathcal{O}\} : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n-1,k}\}$ ja koska $(h^{-1}\{\mathcal{O}\}) \cap (h^{-1}\{\mathcal{U}\}) = \emptyset$ kun $\mathcal{O} \neq \mathcal{U}$, on Korollaarin I 2.15 nojalla voimassa

$$|\mathbb{P}| = \sum\{\left|h^{-1}\{\mathcal{O}\}\right| : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k-1}\} = \sum\{k : \mathcal{O} \in \mathbb{O}_{n,k-1}\} = k \cdot \left|\mathbb{O}_{n-1,k}\right|. \qquad \square$$

Laskemme nyt yllä olevan tuloksen nojalla lukuja $S(n,k)$ ja $S(n)$ eräille pienille n:n arvoille. Voimme kätevästi taulukoida luvut $S(n,k)$ nk. *Stirlingin kolmioon*, missä rivillä n kohdalla k oleva luku on edellisellä rivillä kohdalla $k-1$ olevan luvun ja k:lla kerrotun kohdalla k olevan luvun summa (kun $1 < k < n$).

n														$S(n)$
1							1							1
2						1		1						2
3					1		3		1					5
4				1		7		6		1				15
5			1		15		25		10		1			52
6		1		31		90		65		15		1		203
7	1		63		301		350		140		21		1	877

II 4.3 Esimerkki Laskemme Stirlingin kolmion avulla, monellako tavalla joukko [9] voidaan osittaa korkeintaan viiteen osaan.

Ratkaisu. Yllä näkyy Stirlingin kolmion seitsemän ensimmäistä riviä. Kahdeksas rivi saadaan seitsemännestä reunaehtojen $S(8,1) = 1 = S(8,8)$ ja palautuskaavan $S(8,k) = S(7,k-1) + kS(7,k)$ avulla:

1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tästä puolestaan saadaan vastaavalla tavalla yhdeksäs rivi:

1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Laskemalla yhteen yhdeksännen rivin viisi ensimmäistä lukua saamme etsityn lukumäärän, joka on 18002. □

Harjoitustehtäviä lukuun II

1. Olkoon A joukko, jossa on kuusi lukua väliltä $[1, 9]$. Osoitettava, että on olemassa A:n luvut x ja y, joiden summa on 10. Voidaanko vaatia, että $x \neq y$?

2. Valitaan joukosta $[100] = \{1, 2, 3, \cdots, 99, 100\}$ umpimähkään 56 (eri) lukua. Näytä, että joukossa on kaksi lukua, joiden erotus on 11.

3. Neliönmuotoisen puutarhan laidan pituus on 21 metriä. Montako omenapuuta sinne voidaan istuttaa, kun istutuskohdat eivät saa olla alle kymmenen päässä toisistaan?

   Seuraavassa kolmessa tehtävässä oletamme, että lottoarvonnassa käytettävät, numeroilla 1,2,...,39 merkityt pallot, on asetettu renkaaksi jossain mielivaltaisessa järjestyksessä. Kussakin tehtävässä pitää esitetty väite osoittaa todeksi.

4. Renkaassa on kaksi vierekkäistä paritonnumeroista palloa.

5. Renkaassa on kolme vierekkäistä palloa, joista täsmälleen yksi on paritonnumeroinen.

   [Ohje: tarkastele ensin tapaus, jossa löytyy vierekkäiset parillisnumeroiset pallot.]

6. Renkaassa on kolme vierekkäistä palloa, joiden numeroiden summa on suurempi kuin 60.

   [Ohje: edellisen tehtävän tulos, laatikkoperiaate ja yhtälö $1 + 2 + \cdots + 39 = 13 \cdot 60$.]

   Edelliseen tehtävään liittyen voimme panna merkille, että lottopallot voidaan jakaa kolmen ryhmiin siten, että kuhunkin ryhmään kuuluvien pallojen numeroiden summa on tasan 60; esim. $\{2, 19, 39\}$, $\{6, 17, 37\}$, $\{10, 15, 35\}$, $\{14, 13, 33\}$, $\{18, 11, 31\}$, $\{22, 9, 29\}$, $\{26, 7, 27\}$, $\{30, 5, 25\}$, $\{34, 3, 23\}$, $\{38, 1, 21\}$, $\{8, 16, 36\}$, $\{12, 20, 28\}$, $\{4, 24, 32\}$.

7. Osoita, että on olemassa joukon $[2n]$ n-alkioinen osajoukko X, jonka mikään alkio ei ole jaollinen toisella alkiolla.

8. Olkoon joukolle $X \subset [2n]$ voimassa $|X| > n$. Osoita, että joukossa X on kaksi lukua, joista toinen on toisella jaollinen.

   [Ohje: esitä luvut $m \in X$ muodossa $m = 2^r \cdot k$, missä k on pariton.]

9. Moniko luvuista $1, 2, \ldots, 300$ on jaollinen ainakin yhdellä luvuista $3, 5$ ja 7?

10. Kuinka moni luku joukossa [1000] on jaollinen 5:llä tai 8:lla muttei 6:lla.

11. Moniko joukon [10000] luvuista ei ole jaollinen yhdelläkään luvuista 4,5 ja 6?

12. Kuinka monella luvuista 1,2,3,...,919,920 ei ole (ykköstä suurempaa) yhteistä tekijää luvun 105 kanssa?

13. Kuinka monella luvuista 1,2,3,...,999 ei ole (ykköstä suurempaa) yhteistä tekijää luvun 390 kanssa?

14. Laske Eulerin ϕ-funktion arvo luvulle 910.

15. Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla lukua 250 pienempien alkulukujen lukumäärä.

    (Huom: 1 *ei* ole alkuluku.)

    [Ohje: laske niiden luonnollisten lukujen $1 < n \leq 250$ lukumäärä, jotka eivät ole alkulukuja; pane merkille, että tällaisella luvulla n on alkulukutekijä, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin $\sqrt{n} \leq \sqrt{250} < 16$.]

16. Olkoon X äärellinen joukko, $A \subseteq X$, ja $\mathcal{P}_A(X) = \{B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}$. Mikä on joukon $\mathcal{P}_A(X)$ alkioiden lukumäärä?

17. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $(0, \ldots, 9)$ ainakin kahdesti?

18. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $(0, \ldots, 9)$ ainakin kahdesti ja vierekkäin.

19. Montako sellaista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista *a, k* ja *l* joissa *k* ja *l* esiintyvät kaksi kertaa ja *a* kolme kertaa, mutta minkään kirjaimen kaikki esiintymät eivät ole vierekkäin? (Siis esim. *kalalak* kelpaa, mutta *lakkala* ei.)

20. Montako viisikirjaimista sanaa voidaan muodostaa kirjaimilla *a,k,l,m,o,p* ja *u* kun vaaditaan, että sanassa ei saa esiintyä mitään vierekkäisten kirjainten jonoa *oka, loma, lapa, apu, ala* tai *olo*? (Siis esim. *kallo* kelpaa, mutta *koala* ei.)

21. Näytä, että

$$\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \ldots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \binom{s+n}{n},$$

kun s ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. (Ohje: Pascalin identiteetti.)

22. Laske termin X^3 kerroin polynomissa
$$(3+4X)^6.$$

23. Olkoon $0 \leq k \leq n$. Osoita käyttämättä kaavaa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, että
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
[Ohje: Muodosta vastaavien osajoukkoperheiden välille bijektio.]

24. Olkoot n, k positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

25. Osoita, että
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$
[Tulkinta: Valitaan joukon $[n]$ r-osajoukko, ja siitä k-osajoukko. Tämä vastaa valintoja, joissa ensin valitaan joukon $[n]$ k-osajoukko, ja sitten jäljelle jääneen osan $r-k$-osajoukko.]

26. Johda yhtälö
$$\binom{3n}{3} - 3\binom{n}{3} - 6n\binom{n}{2} = n^3$$
(a) laskemalla.
(b) kombinatorisen päättelyn avulla (käyttämättä lauseketta $\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$).

[Ohje kohtaan (b): laske kahdella eri tavalla montako mahdollisuutta on valita n:n hevosen, n:n koiran ja n:n kissan joukosta hevonen, koira ja kissa.]

27. Olkoon X n–joukko. Näytä, että joukon X kaikkien k–osajoukkojen perheestä voidaan valita $\binom{n-1}{k-1}$:n joukon muodostama osaperhe, johon kuuluvien k–joukkojen parittaiset leikkaukset ovat kaikki epätyhjiä.

28. Olkoon X n–joukko, missä n on parillinen. Näytä, että on olemassa sellainen perheen $\mathcal{P}(X)$ osaperhe Y, että mikään perheen Y joukko ei sisälly toiseen Y:n joukkoon, ja jolle
$$|Y| = \binom{n}{n/2}.$$

29. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa yhtälö $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Esitä yhtälölle kombinatorinen perustelu.

[Ohje: Kirjoita yhtälö ensin muotoon $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.]

30. Laske termin $X^3Y^4Z^2$ kerroin polynomissa

$$(X+Y+Z)^9.$$

31. Osoita, että jos $a+b+c=n$, niin

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{a-1,b,c} + \binom{n-1}{a,b-1,c} + \binom{n-1}{a,b,c-1}.$$

32. Näytä, että $\sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ kaikilla $n>0$. [Ohje: Lemma II 2.2]

33. Osoita kombinatorisen päättelyn avulla, että luvut $\frac{(2n)!}{2^n}$, $\frac{(3n)!}{6^n}$ ja $\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}}$ ovat kokonaislukuja.

34. Osoita, että $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} S_{n,k} = p^n$, kun $p, n \in \mathbb{N}$.

35. Näytä, että

$$S(n,k) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} S(r,k-1).$$

[Ohje: Olkoon $\mathcal{H}$ n–joukon X k–ositus. Poistetaan osituksesta $\mathcal{H}$ se jäsen, joka sisältää annetun alkion x. Tällöin saadaan erään joukon X osajoukon Y $(k-1)$–ositus $\mathcal{H}'$, ja $0 \le |Y| < n$.]

36. Osoita, että

$$\sum_{k=1}^{m} S(m,k)n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^m.$$

37. Laske niiden surjektioiden $f:[5]\to[4]$ lukumäärä, joilla on voimassa $f(1)=1$.

38. Olkoon Y n–joukko ja X $n+2$–joukko. Näytä, että kaikkien surjektioiden $X \to Y$ lukumäärä on $\dfrac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$.

39. Osoita yhtälön $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ avulla, käyttämättä Lauseen II 4.1 kaavaa, että n-joukon 2-ositusten lukumäärä on $2^{n-1}-1$ jokaisella $n>0$.

40. Määritellään ns. *Bellin luvut* B_n asettamalla

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

Osoita, että,

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

41. Tutki, montako ekvivalenssirelaatiota on nelialkioisessa joukossa.

42. Joukolla $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ on 877 eri ositusta. Kuinka monessa näistä alkiot a ja g ovat eri joukoissa? Entä kuinka monessa alkiot a, d ja g ovat kaikki eri joukoissa?

43. Laske niiden kahdeksanalkioisen joukon ositusten lukumäärä, joissa on parillinen määrä osia.

44. Laske joukon [12] 10-ositusten lukumäärä.

    [Ohje: voit esimerkiksi täydentää Stirlingin kolmion "oikeaa laitaa" käyttämällä hyväksi yhtälöitä $S(n, n) = 1$ ja $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.]

45. Kuvaus $\phi : X \to X$ on joukon X *syklinen permutaatio*, mikäli X:llä on sellainen yksinkertainen esitys $X = \{x_1, ..., x_n\}$, että

$$\phi(x_1) = x_2, \phi(x_2) = x_3, \ldots, \phi(x_{i_{n-1}}) = x_{i_n}, \phi(x_{i_n}) = x_{i_1}.$$

    Laske n-joukon X kaikkien syklisten permutaatioiden lukumäärä.

III

Laskemismenetelmiä

III 1. Valinnat ja sijoittelut.

Edellä laskimme koon eli alkioiden lukumäärän eräille äärellisille joukoille, kuten annetun äärellisen joukon kaikkien osajoukkojen muodostamalle joukolle ja kahden annetun äärellisen joukon välisten kuvausten muodostamalle joukolle. Edellä tarkastellut lukumääräongelmat ovat kaikkein yksinkertaisimpia klassillisen "kombinatoriikan" käsittelemistä ongelmista. Kombinatoriikka kehittyi paljolti yht'aikaa klassillisen todennäköisyyslaskennan kanssa ja tästä yhteydestä johtuen kombinatoriikan käsitteitä ilmaistaan usein havainnollisin termein, jotka eivät suoraan liity joukko–oppiin: puhutaan esimerkiksi "n:n alkion k–kombinaatioista" kun tarkoitetaan n–joukon k–osajoukkoja ja kuvausten asemasta puhutaan "sijoitteluista" tai vaikkapa "valinnoista takaisinpanolla" ; bijektioita $X \to X$ kutsutaan joukon X "permutaatioiksi" , jne.

Esittelemme tässä luvussa hieman klassillista kombinatorista terminologiaa, jotta voimme ilmaista tarkasteltavia lukumääräongelmia. Käytetyn havainnollisen terminologian johdosta myös "valintoja", "sijoitteluita" yms. koskevien tulosten todistukset esitetään usein havainnollisessa muodossa. Annamme seuraavassa muutamia esimerkkejä tällaisista havainnollisista "todistuksista" ja pyydämme lukijaa olemaan erityisen tarkkaavainen näiden kohdalla, sillä vaikka tällaiset "todistukset" ovatkin helppolukuisia, on niiden yhteydessä myös paljon helpompi tehdä virheitä kuin tavallisen, formaalisen todistuksen yhteydessä.

Annamme tässä ja kahdessa seuraavassa luvussa eräitä menetelmiä kombinatoristen ongelmien ratkaisemiseen. Tarvitsemme tietenkin erityismenetelmien lisäksi tavallisia yleisluontoisia lasku- ja päättelysääntöjä, joita käytämme usein ilman eri mainintaa. Lukumääräongelmien ratkomiseksi joudumme esimerkiksi jatkuvasti turvautumaan *tapauksiin jakoon* ja siihen liittyvään *summasääntöön* ja toisistaan riippumattomien tapahtumien yhdistämiseen liittyvään *tulosääntöön*. Nämä säännöt voi muotoilla seuraavasti. Olkoon jokaisella $i \in [\ell]$ $\mathcal{A}_i$ jokin tapahtuma, joka voi toteutua n_i:llä eri tavalla. Summasäännön mukaan tapahtuma $\mathcal{A}_1$ *tai* $\mathcal{A}_2$ *tai* $\cdots$ *tai* $\mathcal{A}_\ell$ voi toteutua $n_1 + n_2 + \cdots + n_\ell$ eri tavalla, mikäli osatapahtumat $\mathcal{A}_i$, $i \in [\ell]$, ovat keskenään erillisiä. Tulosäännön mukaan tapahtuma $\mathcal{A}_1$ *ja* $\mathcal{A}_2$ *ja* $\cdots$ *ja* $\mathcal{A}_\ell$ voi toteutua $n_1 \cdot n_2 \cdots n_\ell$ eri tavalla mikäli osatapahtumat $\mathcal{A}_i$, $i \in [\ell]$, ovat toisistaan riippumattomia.

Eräitä edellä tarkasteltuja lukumääräongelmia voidaan esittää nk *valintoihin* liittyvinä ongelmina. Perusongelma on seuraava:

III 1.1 Ongelma Olkoon X n–joukko. Kuinka monella tavalla voidaan joukon X alkioiden joukosta valita k alkiota?

Ongelman yhteydessä voidaan erottaa kaksi eri tapausta: jos valintajärjestys otetaan huomioon, jolloin valinta määrää X:n k:n eri alkion muodostaman jonon $(x_1, ..., x_k)$, niin puhutaan joukon X *k–permutaatiosta.* Jos taas valintajärjestyksellä ei ole merkitystä, jolloin siis valitaan X:n k–osajoukko $\{x_1, ..., x_k\}$, niin puhutaan joukon X *k–kombinaatiosta.*

Laskemme nyt n–joukon X k–permutaatioiden ja k–kombinaatioiden lukumäärät Luvun II 3 tulosten avulla.

Joukon X k–permutaatio $(x_1, ..., x_k)$ samaistuu luonnollisesti injektioon $j \mapsto x_j$ joukolta $[k]$ joukkoon X; kaikkien tällaisten injektioiden lukumäärä on Lauseen II 3.12 nojalla $\frac{n!}{(n-k)!}$ ja tämä on siis n–joukon X k–permutaatioiden lukumäärä. Mikäli on voimassa $k = n$, niin voimme esittää joukon X muodossa $\{a_1, ..., a_k\}$ ja tällöin jokainen joukon X k–permutaatio $(x_1, ..., x_k)$ voidaan samaistaa bijektioon $\varphi : X \to X$, missä $\varphi(a_i) = x_i$; täten n–permutaatio määrää joukon X *permutaation*; näiden lukumäärä on sama kuin joukon $B(X, X)$ koko eli $n!$

Koska X:n k–kombinaatiot vastaavat X:n k–osajoukkoja, niin k–kombinaatioiden lukumäärä on sama kuin joukkoperheen $\mathcal{P}_k[n]$ koko eli $\binom{n}{k}$.

III 1.2 Esimerkki Joukon X permutaatiota kutsutaan toisinaan X:n *järjestelyksi.* Kuten edellä todettiin, n–joukolla X on $n!$ järjestelyä; lasketaan nyt, kuinka moni näistä järjestelyistä on *epäjärjestely* eli sellainen järjestely, jossa jokainen alkio vaihtaa paikkaa.

Ratkaisu. Epäjärjestelyt vastaavat niitä joukon X bijektioita itselleen, joissa mikään X:n alkio ei kuvaudu itselleen. Merkitsemme jokaisella $x \in X$ $A_x = \{f \in B(X,X) : f(x) = x\}$; tällöin epäjärjestelyt vastaavat joukkoa $B(X,X) \smallsetminus \bigcup_{x\in X} A_x$. Laskemme epäjärjestelyjen lukumäärän laskemalla yhdistysjoukon $\bigcup_{x\in X} A_x$ koon summa– ja erotusperiaatteen avulla.

Jokaisella $Z \subset X$ on voimassa

$$\bigcap_{z\in Z} A_z = \{f \in B(X,X) : f(z) = z \text{ jokaisella } z \in Z\} \ ;$$

oikeanpuoleisen joukon alkiot voidaan luonnollisella tavalla (kuvauksen $f \mapsto f|(X \smallsetminus Z)$ välityksellä) samaistaa joukon $X \smallsetminus Z$ permutaatioihin, joten oikeanpuoleisen joukon koko on $|B(X \smallsetminus Z, X \smallsetminus Z)|$ eli $|X \smallsetminus Z|!$; jos siis Z on X:n k–osajoukko, niin on voimassa $|\bigcap_{z\in Z} A_z| = (n-k)!$ Summa– ja erotusperiaate antaa seuraavan yhtälön:

$$\left|\bigcup_{x\in X} A_x\right| = \sum_{\emptyset\neq Z\subset X} (-1)^{|Z|+1} \left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| \ .$$

Jokaiselle X:n k–osajoukolle Z on voimassa $|Z|+1 = k+1$ ja, kuten edellä totesimme, $\left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| = (n-k)!$ Koska X:n k–osajoukkojen lukumäärä $\binom{n}{k}$ on Lauseen II 3.9 nojalla $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, niin edellisen nojalla saadaan seuraava yhtälöketju:

$$\left|\bigcup_{x\in X} A_x\right| = \sum_{\emptyset\neq Z\subset X} (-1)^{|Z|+1} \left|\bigcap_{z\in Z} A_z\right| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (n-k)! =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = -n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \ .$$

Edellä osoitetun nojalla on voimassa

$$|B(X,X) \smallsetminus \bigcup_{x\in X} A_x| = n! - |\bigcup_{x\in X} A_x| = n! + n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \ ;$$

täten joukon X kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärä on $n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$. □

Huomautus. Jos n–joukon kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärä jaetaan joukon kaikkien järjestelyjen lukumäärällä eli luvulla $n!$, niin saadaan luku $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$, joka ilmaisee *todennäköisyyden* sille, että umpimähkään valittu n–joukon järjestely olisi epäjärjestely. (Differentiaalilaskentaa tunteva lukija voi tunnistaa lausekkeessa $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ luvun e^{-1} sarjakehitelmän alkuosan. Kun n kasvaa rajatta, niin lausekkeen $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$ arvo lähenee lukua $e^{-1} \sim 0,3678794$).

III 1.3 Esimerkki Jokainen pikkujoulujuhliin osallistuja tuo mukanaan lahjapaketin. Paketit pannaan koriin, josta jokaiselle juhlijalle annetaan lahja. Mikä on todennäköisyys sille, ettei kukaan juhlija saa takaisin tuomaansa lahjaa, kun juhlijoiden lukumäärä on (a) 10 ja (b) 100.

Ratkaisu. Sijoitamme yllä johdettuun todennäköisyyden lausekkeeseen $n = 10$ ja $n = 100$ ja laskemme summalausekkeiden arvot. Täten saamme tapauksessa (a) todennäköisyydeksi noin $0,36787946$ ja tapauksessa (b) noin $0,36787944$. Kuten huomaamme, todennäköisyydet lähenevät n:n kasvaessa hyvin nopeasti raja–arvoa e^{-1}. □

Edellä tarkasteltujen "yksinkertaisten" valintojen lisäksi voidaan tarkastella "toistollisia" valintoja (todennäköisyyslaskennassa puhutaan usein "valinnoista takaisinpanolla" kun tarkoitetaan valintoja, joissa joku alkio voidaan valita useamman kuin yhden kerran). Esimerkiksi seuraavassa on eräs tyypillinen ongelma, jota voidaan kuvata toistollisena valintana: on annettuna kaksi valkoista ja neljä mustaa palloa ja näiden joukosta on valittava kolme palloa; kuinka monella eri tavalla voidaan valinta tehdä? Tässä tehtävässä oletetaan, että valkoiset pallot eivät erotu toisistaan eivätkä mustat pallot erotu toisistaan; täten annettu valinta kuuden pallon joukosta voidaan myös tulkita "toistollisena" valintana kahden pallon (valkoinen ja musta) joukosta, missä yksi pallo (valkoinen) voidaan valita 0,1 tai 2 kertaa ja toinen pallo (musta) voidaan valita 0,1,2,3 tai 4 kertaa.

Perusongelma toistollisten valintojen yhteydessä on seuraava:

III 1.4 Ongelma Olkoon X n–joukko. Kuinka monella tavalla voidaan joukon X alkioiden joukosta valita k alkiota, kun jokaiselle X:n alkiolle x on annettu *toistolukujen* joukko $T_x \subset \mathbb{N}$ ja vaaditaan, että kukin alkio x tulee valituksi täsmälleen t kertaa jollain $t \in T_x$?

Tämänkin ongelman yhteydessä voidaan erottaa kaksi eri tapausta sen mukaan, otetaanko valintajärjestys huomioon vai ei:

Jos järjestys huomioidaan, niin valittavaksi tulee sellainen X:n alkioiden muodostama k–jono $(z_1, ..., z_k)$, että jokaisen joukon X alkion x esiintymiskertojen lukumäärä $|\{i \in [k] : z_i = x\}|$ kyseisessä jonossa kuuluu lukujoukkoon T_x; tällaista jonoa kutsunaan toisinaan *toistolukuihin* T_x, $x \in X$, *liittyväksi joukon* X *toistolliseksi* k*–permutaatioksi.*

Eräissä tilanteissa puhutaan "joukon X alkioiden muodostamien k–jonojen" asemasta "aakkoston X avulla muodostetuista k–sanoista". Tarkastellaan nyt seuraavaa ongelmaa:

III 1.5 Esimerkki Määritämme, montako 5–sanaa voidaan muodostaa aakkoston $\{a, m, n, s, t\}$ avulla, kun vaaditaan, että sanassa esiintyy kirjain a kaksi tai kolme kertaa ja kukin muu kirjain korkeintaan kerran.

Ratkaisu. Esimerkiksi "mataa", "maata" , "ansat" ja "asatm" ovat vaaditun kaltaisia sanoja. Kaikkien tällaisten sanojen laskemiseksi voimme ajatella sanat muodostetuiksi seuraavalla tavalla: ensin on valittu joukon [5] 2–kombinaatio tai 3–kombinaatio A, jonka alkioita vastaaville 5–sanan kohdille on sijoitettu a–kirjaimet; tämän jälkeen on valittu joukon $\{m, n, s, t\}$ 3–permutaatio (xyz) (jos $|A| = 3$) tai 2–permutaatio (xy) (jos $|A| = 3$); kyseisen permutaation jäsenet on sijoitettu 5–sanaan permutaation ilmaisemassa järjestyksessä joukon $[5] \setminus A$ alkioiden määräämille paikoille. Koska joukolla [5] on $\binom{5}{2} = 10$ 2–kombinaatiota ja $\binom{5}{3} = 10$ 3–kombinaatiota ja joukolla $\{m, n, s, t\}$ on $\frac{5!}{2!} = 60$ 3–permutaatiota ja $\frac{5!}{3!} = 20$ 2–permutaatiota, niin vaaditun kaltaisia sanoja on $10 \cdot 60 + 10 \cdot 20 = 800$ kappaletta. □

Mikäli valintajärjestyksellä ei ole merkitystä, jolloin siis valitaan X:n "toistollinen" k–osajoukko $\{z_1, ..., z_k\}$, niin puhutaan joukon X *toistollisesta* k*–kombinaatiosta*; tässä "toistollisen osajoukon" käsite ei valitettavasti ole hyvin määritelty (palautetaan mieliin, että "joukko on alkioidensa määräämä kokonaisuus"; joukko ei näin ollen ole riippuvainen siitä, miten sen alkiot on lueteltu; esimerkiksi $\{0, 1, 2\} = \{1, 2, 0\} = \{1, 1, 0, 0, 0, 2\}$). Asiaintilan korjaamiseksi sovimme, että joukon X alkioiden muodostama "toistollinen k–joukko" eli "k–monijoukko" on sellainen kuvaus $f : X \to \mathbb{N}$, että $\Sigma_{x \in X} f(x) = k$. Näin määriteltynä toistolukuihin T_x, $x \in X$, liittyvä joukon X toistollinen k–kombinaatio on sellainen k–monijoukko $f : X \to \mathbb{N}$, että $f(x) \in T_x$ jokaisella $x \in X$.

Annettuihin toistolukuihin T_x, $x \in X$, liittyvät joukon X alkioiden muodostamat toistolliset k–kombinaatiot vastaavat yksinkertaisia k-kombinaatioita eli X:n k–osajoukkoja siinä tapauksessa, että jokaisella $x \in X$ on voimassa $T_x \subset \{0, 1\}$. Usein esiintyy myös tilanne, jossa jollekin alkiolle $x \in X$ on voimassa $T_x = \mathbb{N}$; tässä tilanteessa sanotaan alkiolla x olevan *rajoittamattomat toistoluvut.* Tarkastelemme seuraavaa ongelmaa:

III 1.6 Esimerkki Kuinka monta toistollista 2–kombinaatiota on 3–joukolla kun kaikkien alkioiden toistoluvut ovat rajoittamattomat?

Ratkaisu. Olkoon kyseinen 3–joukko vaikkapa $\{a, b, c\}$. Halutaan siis löytää lukumäärä kaikille alkioiden a, b ja c muodostamille 2–monijoukoille; lukija voi helposti todeta, että seuraavassa on lueteltu kaikki tällaiset monijoukot, joita on siis kuusi kappaletta:

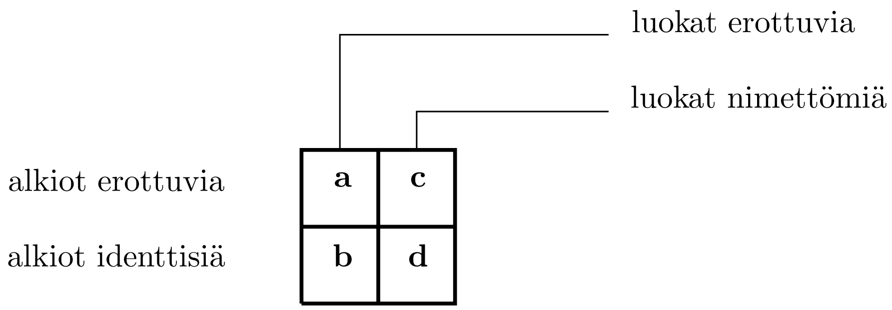
$$\{(a,2),(b,0),(c,0)\} \quad \{(a,1),(b,1),(c,0)\} \quad \{(a,1),(b,0),(c,1)\}$$
$$\{(a,0),(b,2),(c,0)\} \quad \{(a,0),(b,1),(c,1)\} \quad \{(a,0),(b,0),(c,2)\} \qquad \square$$

Palaamme hetken päästä edelliseen ongelmaan ja osoitamme, miten rajoittamattomiin toistolukuihin liittyvien n:n alkion muodostamien toistollisten k–kombinaatioiden lukumäärä voidaan laskea samaistamalla kyseisenlaiset toistolliset kombinaatiot erään $n + k - 1$–alkioisen joukon yksinkertaisiin k–kombinaatioihin.

Monia kombinatorisia ongelmia voidaan kuvata nk. *sijoitteluihin* liittyvinä ongelmina. Perusongelma on seuraavanlainen:

Ongelma. Olkoon X n–joukko ("pallojen" joukko) ja olkoon Y m–joukko ("laatikoiden" joukko). Kuinka monella tavalla voidaan alkiot $x \in X$ sijoittaa luokkiin $y \in Y$?

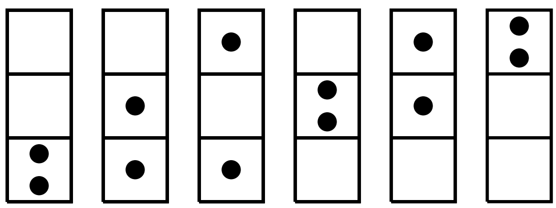
Tämä ongelma jakautuu eri tapauksiin sen mukaisesti, ovatko tarkastellut "pallot" ja "laatikot" toisistaan erottuvia vai ei: voisimme esimerkiksi kysyä monellako tavalla kolme valkoista palloa ja kaksi mustaa palloa voidaan sijoittaa kahteen punaiseen laatikkoon ja kahteen siniseen laatikkoon, kun samanvärisiä palloja ei voi erottaa toisistaan eikä samanvärisiä laatikoita voi erottaa toisistaan. Yksinkertaisimmillaan ongelma jakautuu neljään eri tapaukseen:



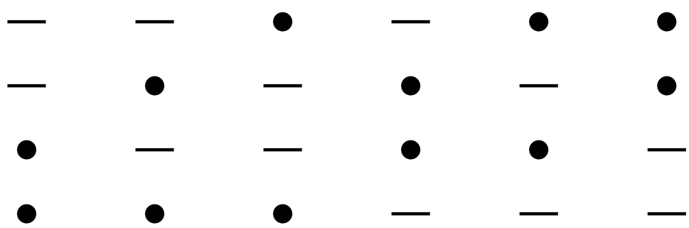
Tapaus (a) Jos sekä alkiot että luokat erottuvat toisistaan, niin sijoittelu $x \mapsto y$ vastaa kuvausta $X \to Y$; näiden lukumäärä on Lauseen II 3.11 nojalla m^n.

Tapaus (b) Jos alkiot ovat keskenään samanlaisia, mutta luokat erotellaan, niin riittää tietää luokkaan y sijoitettujen alkioiden lukumäärä $f(y) \geq 0$ jokaisella $y \in Y$. Toisin sanoen, sijoittelu voidaan samaistaa monijoukkona $f : Y \to \mathbb{N}$ esitettyyn joukon Y toistolliseen n–kombinaatioon (josta käytetään tässä yhteydessä usein nimitystä *joukon* Y n*–jakauma*).

Esimerkki Olkoon $n = 2$ ja $m = 3$. Tällöin m–joukolla on 6 n–jakaumaa (vertaa edelliseen esimerkkiin):



Huomaamme, että tämä sijoittelutilanne voidaan myös kuvata yksinkertaisena valintatilanteena: muodostetaan 4–jonoja valitsemalla ensin joukosta [4] kaksi alkiota ja sijoittamalla näiden määräämille paikoille pallot ja sijoittamalla kahteen jäljellejäävään paikkaan väliseinät:



Kun tulkitsemme sijoittelun valinnaksi, saamme jakaumien lukumääräksi $\binom{4}{2} = 6$ eli saman tuloksen kuin edellä. Vastaavalla päättelyllä lukija voi harjoitustehtävänä osoittaa, että yleisessä tapauksessa pätee seuraava tulos:

$$\boxed{m\text{–joukolla on } \binom{n+m-1}{n} \; n\text{–jakaumaa.}}$$

Tulkitsimme edellä sijoittelun valintana. Usein myös myös mahdollista (ja hyödyllistä) tulkita valinta sijoitteluna.

Esimerkki Monellako eri tavalla on mahdollista valita viiden valkoisen, viiden keltaisen ja viiden punaisen pallon joukosta kymmenen palloa? Emme ota valintajärjestystä huomioon ja oletamme, että samanväriset pallot eivät erotu toisistaan.

Ratkaisu. Tulkitsemme tehtävän kymmenen keskenään identtisen pallon sijoitteluna kolmeen laatikkoon v, k ja p, joista kuhunkin mahtuu korkeintaan viisi palloa. Ilman lisäehtoa sijoittelujen lukumäärä olisi edellisen kaavan nojalla $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$. Lasketaan, moniko näistä 66 sijoittelusta on vääränlainen. Vain yhteen laatikkoon on mahdollista sijoittaa yli viisi palloa, joten kaikkien väärien sijoittelujen lukumäärä on kolme kertaa niiden sijoittelujen lukumäärä, joissa laatikkoon v tulee yli viisi palloa.

Jos laatikkoon v tulee k palloa, missä $k > 5$, niin jäljelle jäävät $10 - k$ palloa voidaan sijoittaa laatikoihin k ja p $\binom{10-k+2-1}{10-k}$ eri tavalla. Täten "kiellettyjen sijoittelujen" lukumäärä on

$$3\left(\binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0}\right) = 3(5+4+3+2+1) = 45\,.$$

Etsitty lukumäärä on siis $66 - 45 = 21$. □

Tapaus (c) Oletamme seuraavaksi, että X:n alkiot erottuvat toisistaan, mutta luokkia ei nimetä. Jos jokaiseen luokkaan tulee ainakin yksi alkio, niin sijoittelu vastaa joukon X *k–ositusta.* Ositusten lukumääriä on laskettu Luvussa II 4.

Tapaus (d) Viimeiseksi tarkastelemme tapausta, jossa alkiot ovat identtisiä eivätkä luokatkaan erotu toisistaan. Jos vaadimme, että kuhunkin luokkaan tulee alkioita, niin sijoittelu vastaa luvun n *k–partitiota* eli esitystä

$$n = n_1 + \cdots + n_k \qquad (n_i > 0 \text{ jokaisella } i)\ ,$$

missä summan termien järjestyksellä ei ole merkitystä. Voisimme antaa täsmällisemmän määritelmän "esitykselle" vaikkapa monijoukkojen avulla ja sanoa, että luvun n k–partitio on sellainen positiivisten luonnollisten lukujen $a \in A$ muodostama k–monijoukko $f : A \to \mathbb{N}$, että $n = \Sigma_{a \in A} f(a) \cdot a$. Tällöin luvun k–partitiot olisivat siis luonnollisten lukujen toistollisia k–kombinaatioita. Jos haluaisimme esittää toistolliset k–kombinaatiot monijoukkojen asemasta toistollisten k–permutaatioiden ekvivalenssiluokkina, niin voisimme yksinkertaistaa esitystä valitsemalla luonnollisten lukujen järjestystä hyväksi käyttäen yhden edustajan kustakin ekvivalenssiluokasta. Selvästikin kussakin ekvivalenssiluokassa on yksi ja vain yksi sellainen jono $(n_1, ..., n_k)$, että $n_i \leq n_{i+1}$ jokaisella $i < k$. Voisimme siis määritellä luvun n k–partition sellaisena positiivisten luonnollisten lukujen muodostamana jonona $(n_1, ...n_k)$, jolla $n = \Sigma_{i=1}^k n_i$ ja jokaisella $i < k$ on voimassa $n_i \leq n_{i+1}$. Kun nyt olemme todenneet, että partitiot voidaan useammallakin tavalla määritellä täsmällisesti, niin voimme palata käyttämään niille luonnollista “esitystä” summalausekkeina.

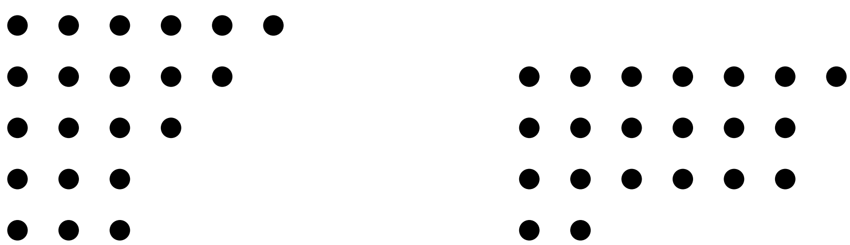
Esimerkki Luvulla $n = 5$ on seitsemän eri partitiota:

$$5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1 \ .$$

Partitioiden lukumääriin liittyvät ongelmat ovat usein hyvin vaikeita, mutta niiden ratkaisemisessa voidaan joissain tilanteissa käyttää apuna nk. generoivia funktioita. Tässä tarkastelemme lyhyesti erästä yksinkertaista menetelmää, nk. Ferrersin kuvioita, joiden avulla voidaan johtaa eräitä partitioiden lukumääriä koskevia identiteettejä.

Ferrersin kuvio koostuu äärellisen monesta päällekkäisiin riveihin sijoitellusta äärellisestä pistejonosta. Jonot alkavat samalta kohdalta ja lisäksi vaaditaan, että ylempänä olevassa rivissä on vähintäänkin yhtä monta pistettä kuin alempana olevassa.

Jos Ferrersin kuvio koostuu n:stä pisteestä, niin kuvio esittää sitä luvun n partitiota $n = n_1 + \cdots + n_k$, missä n_i on $k - i$:nnellä rivillä olevien pisteiden lukumäärä. Esimerkiksi luvun 21 partitioita $21 = 3+3+4+5+6$ ja $21 = 2+6+6+7$ vastaavat alle piirretyt Ferrersin kuviot.

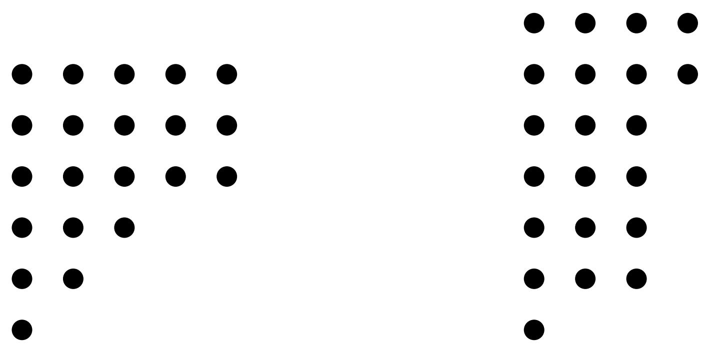


Ferrersin kuvioiden avulla voimme todistaa eräitä mielenkiintoisia partitioiden lukumääriä koskevia tuloksia. Merkitsemme $p_k(n)$:llä kaikkien luvun n k–partioiden lukumäärää kun $0 \leq k \leq n$; muille n:n ja k:n arvoille asetamme $p_k(n) = 0$.

(i) Jos poistamme luvun n annetun k–partition Ferrersin kuviosta vasemmanpuolimmaisen pystyrivin, niin jäljelle jää Ferrersin kuvio, joka kuvaa erästä luvun $n-k$ partitiota korkeintaan k:hon osaan. Täten päädymme seuraavaan *palautuskaavaan*

$$\boxed{p_k(n) = p_1(n-k) + \cdots + p_k(n-k)}$$

(ii) Jokaisen Ferrersin kuvion *transponoitu kuvio*, (eli k-partition tapauksessa se kuvio jonka $k-i$:nnen rivin j:nnellä paikalla on piste täsmälleen silloin kun alkuperäisessä kuviossa on piste $k-j$:nnen rivin i:nnellä paikalla) on Ferrersin kuvio. Seuraava kuva esittää kahta Ferrersin kuviota, jotka saadaan transponoimalla edellisessä kuvassa esitetyt kuviot.



Tarkastelemalla transponoituja kuvioita, näemme esimerkiksi seuraavien tulosten olevan voimassa:

Luvun n k–partitioiden lukumäärä $p_k(n)$ on sama kuin niiden n:n partitioiden lukumäärä, joissa esiintyy k suurimpana lukuna.

Luvulla n on yhtä monta partitiota parillisen (parittoman) moneen osaan kuin sellaista partitiota, joissa esiintyvä suurin luku on parillinen (pariton).

III 2. Generoivat funktiot.

Olemme edellä todenneet, että annetun n-joukon k-osajoukkojen lukumäärät voidaan esittää polynomin $(1+x)^n$ termien x^k kertoimina. Tämä on esimerkki *generoivista funktioista*, jotka esittävät annetun joukon alkioiden kombinaatioiden jakaumia. Polynomin $(1+x)^n$ tapauksessa (kun polynomi on aukikerrotussa muodossa) symbolin x^k kerroin $\binom{k}{n}$ antaa joukon $[n]$ k-osajoukkojen lukumäärän, joten polynomi itse antaa näiden osajoukkojen lukumäärien **jakauman**. Generoivien funktioiden hyödyllisyys seuraa siitä, että niitä voidaan käsitellä differentiaali- ja integraalilaskennan menetelmien avulla. Historiallisesti generoivat funktiot ovat antaneet luonnollisen tavan kombinatoristen ongelmien ratkaisemiseen, mistä näemme esimerkin eräissä kokonaislukujen partitioille esitetyissä lausekkeissa, joita Euler johti generoivien funktioiden avulla.

Tarkastelemme yksinkertaisten esimerkkien valossa (toistollisten) kombinaatioiden lukumääräongelmaa.

III.2.1 Esimerkki Valitsemme k-kombinaatioita kolmen alkion a, b ja c joukosta. Tarkastelemme ensin yksinkertaisia eli toistottomia valintoja.

(a) Alkioiden a, b ja c joukosta voimme valita nolla alkiota yhdellä tavalla. Merkitsemme tätä valintaa symbolilla 1 (*motivaatio:* $a^0 = b^0 = c^0 = 1$). Yhden alkion voimme valita kolmella eri tavalla ja merkitsemme näitä valintoja symboleilla a^1, b^1 ja c^1 tai lyhyemmin a, b ja c. Samoin voimme valita kaksi alkiota kolmella eri tavalla; merkitsemme näitä symboleilla ab, bc ja ac. Lopuksi kolme alkiota voidaan valita yhdellä tavalla, mitä merkitään symbolilla abc. Nämä valintamahdollisuudet saadaan myös laskemalla symbolinen tulo

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ac) + (abc)\,.$$

Mikäli olemme vain kiinnostuneita lukumääristä, voimme sijoittaa a:n, b:n ja c:n tilalle symbolin x, jolloin saamme polynomin

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3\,,$$

ja tässä termin x^k kerroin osoittaa kuinka monella tavalla k alkiota voidaan valita joukosta $\{a, b, c\}$.

(b) Tarkastelemme samaa tilannetta kuin edellä paitsi, että nyt alkiolla a on toistoluvut $1, 2, 3$, alkiolla b on toistoluvut $0, 1, 2$ ja alkiolla c on toistoluvut $0, 1$.

Tällä kertaa voimme valita alkioista a, b ja c yhden alkion vain yhdellä tavalla: koska 0 ei ole alkion a toistolukujen joukossa, on a aina valittava. Merkitsemme tätä valintaa edelleen symbolilla a. Kahden alkion valinnoista bc ei ole nyt mahdollinen, mutta valinnat ab ja ac ovat edelleen mahdollisia. Lisäksi meillä on mahdollisuus valita aa, koska 2 on a:n toistolukujen joukossa; sen sijaan valinta bb ei ole mahdollinen, vaikka 2 on myös b:n toistoluku. Kun merkitsemme valintaa aa vaihtoehtoisella symbolilla a^2, voimme luetella mahdolliset kahden alkion valinnat seuraavasti: ab, ac, a^2. Kolme alkiota voimme valita viidellä eri tavalla, symbolein abc, ab^2, a^2b, a^2c ja a^3. Lisäksi voimme valita neljä alkiota viidellä eri tavalla: ab^2c, a^2bc, a^2b^2, a^3b, a^3c. Voimme myös valita viisi alkiota kolmella eri tavalla: a^2b^2c, a^3b^2, a^3bc. Lopuksi, voimme valita kuusi alkiota yhdellä tavalla: a^3b^2c.

Eri valinnat näkyvät polynomin $(a + a^2 + a^3)(1 + b + b^2)(1 + c)$ avatussa lausekkeessa:

$$a + (a^2 + ab + ac) + (abc + ab^2 + a^2b + a^2c + a^3)+$$
$$(ab^2c + a^2bc + a^2b^2 + a^3b + a^3c) + (a^2b^2c + a^3bc + a^3b^2) + a^3b^2c\,.$$

Mikäli olemme vain kiinnostuneita lukumääristä, korvaamme taas a:n, b:n ja c:n symbolilla x, jolloin saamme polynomin

$$(x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)(1 + x) = x + 3x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6\,,$$

ja termin x^k kerroin osoittaa kuinka monella tavalla k alkiota voidaan valita joukosta $\{a, b, c\}$ (annettujen toistolukujen mukaisesti). $\square$

Edellä esiintyvät polynomit $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ ja $x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$ ovat esimerkkejä funktioista, jotka "generoivat" tiettyjä lukujonoja, tässä tapauksessa k-kombinaatioiden lukumäärien muodostamia jonoja. Määrittelemme nyt yleisen "generoivan funktion" käsitteen.

III 2.2 Määritelmä Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanomme, että sarja

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots}$$

on lukujonon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *generoiva funktio.*

Määrittelemme tässä generoivat funktiot vain *muodollisina* potenssisarjoina, emmekä vaadi, että ne oikeasti määrittäisivät mitään funktioita. Mikäli kuitenkin tiedämme, että potenssisarja $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ suppenee muuttujan x arvolla $x_0 \neq 0$, niin sarja suppenee pisteen 0 ympäristössä $H = \{x \in \mathbb{R} : |x| < |x_0|\}$ ja funktio $f(x)$ on, paitsi hyvin määritelty, myös äärettömän monta kertaa derivoituva joukossa H. Funktion f derivaatta joukossa H saadaan kaavasta

$$\boxed{f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots}$$

Derivaatta saadaan siis "derivoimalla sarjaa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ termeittäin". Voimme suorittaa saman operaation uudelleen, jolloin saamme funktion f toisen derivaatan:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots .$$

Jos potenssisarja suppenee jollain $x_0 \neq 0$, niin saamme sille integraalifunktion "integroimalla sarjaa termeittäin". Potenssisarjalle $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ saamme täten integraalifunktioksi potenssisarjan $a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^{n+\cdots}$.

Jos sekä sarja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ että sarja $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$ suppenevat joukossa $H = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$, missä $r > 0$, niin funktioiden f ja g lineaarikombinaatio $sf + tg$, missä $s, t \in \mathbb{R}$, sekä f:n ja g:n tulo fg joukossa H saadaan kaavoista

$$\boxed{sf(x) + tg(x) = (sa_0 + tb_0) + (sa_1 + tb_1)x + \cdots + (sa_n + tb_n)x_n + \cdots}$$

$$\boxed{f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n + \cdots}$$

Vaikka määrittelimmekin generoivat funktiot vain muodollisina potenssisarjoina, niin käytännössä käsittelemme niitä funktioina. Koska generoiva funktio on annettu päättymättönä sarjana, olisi sitä käsiteltäessä (esimerkiksi derivoitaessa sitä termeittäin) periaatteessa tunnettava sarjan suppeneminen pisteen $x = 0$ jossakin ympäristössä. Generoivien funktioiden tapauksessa voimme kuitenkin yleensä jättää suppenemiskysymykset huomiotta ja käsitellä sarjoja ikään kuin ne suppenisivat. Tätä voi perustella muun muassa seuraavalla tavalla. Käytämme alla generoivia funktioita ratkaisemaan lukumääräongelmia: esitämme etsityn lukumäärän jonkun (muodollisen) potenssisarjan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ kertoimena a_k. Usein olemme muodostaneet potenssisarjan $f(x)$ äärellisen monen muun potenssisarjan $g_i(x) = b_{i,0}+b_{i,1}x+\cdots$ avulla käyttäen sarjojen yhteenlaskemista, kertomista, termeittäin derivoimista jne. Voimme havaita, että on olemassa sellainen luku $N \in \mathbb{N}$, että jos korvaamme kunkin potenssisarjan $g_i(x)$ polynomilla $G_i(x) = b_{i,0} + b_{i,1}x + \cdots + b_{i,N}x^N$ ja suoritamme samat operaatiot näille polynomeille $G_i(x)$ kuin olimme suorittaneet sarjoille $g_i(x)$, niin päädymme polynomiin $F(x)$, jolla on sama luku a_k termin x^k kertoimena kuin sarjalla $f(x)$. Polynomeja voimme laskea yhteen, kertoa keskenään, derivoida termeittäin jne. tuttujen sääntöjen mukaisesti.

Edellisen perusteella voimme käsitellä generoivia funktioita samaan tapaan kuin polynomeja. Tämän nojalla *määrittelemme* generoiville funktioille derivaatan, lineaarikombinaatiot ja tulon edellä mainituilla kaavoilla.

Luvun alussa selostamamme menetelmä erilaisten valintojen lukumäärien laskemiseksi generoivien polynomien avulla oli ennen kaikkea “kirjanpitoa”: lukumäärät saatiin kätevästi “koodattua” polynomien kertoimina. Generoivien funktioiden käyttökelpoisuus perustuu kuitenkin varsinaisesti siihen, että voimme niiden yhteydessä usein käyttää differentiaalilaskennan tuloksia ja menetelmiä. Voimme muodostaa uusia funktioita laskenmalla yhteen ja kertomalla keskenään generoituvia funktioita, derivoimalla niitä, jne. Lopputuloksena saatava funktio on jonkun lukujonon $a_0, a_1, \ldots$ generoiva funktio f. Jonon termit saamme derivoimalla funktiota f: $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2}f''(0)$,..., $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$,...Näin löydetyt kertoimet antavat mahdollisesti ratkaisun tarkastelemallemme lukumääräongelmalle.

Vaikka meidän ei seuraavassa tarvitsekaan juuri välittää potenssisarjojen suppenemisesta, niin generoivien funktioiden hyödyllisyys perustuu kuitenkin suurelta osin siihen, että monet potenssisarjat määrittävät funktioita ja nämä voidaan toisinaan esittää “suljetussa muodossa”.

III 2.3 Esimerkki (a) Olkoon $a \neq 0$. Geometrisen summan kaavan nojalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots + a^nx^n = \frac{1 - a^{n+1}x^{n+1}}{1 - ax} \quad \text{kun } x \neq \frac{1}{a}.$$

Jos edellä $|x| < |\frac{1}{a}|$, niin $a^{n+1}x^{n+1} \to 0$ kun $n \to \infty$ ja saamme "rajalla" yhtälön

$$1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - ax}.$$

Tämän tuloksen perusteella voimme (terminologiaa hieman venyttäen) sanoa, että *funktio* $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ *on lukujonon* $1, a, a^2, a^3, \ldots$ *generoiva funktio.*

Erityisesti näemme, että funktio $g(x) = \frac{1}{1-x}$ on jonon $1, 1, 1, \ldots$ generoiva funktio. Funktion g derivaattafunktio on $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Koska jonon $a_0, a_1, \ldots$ generoivan funktion derivaatta on jonon $a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots$ generoiva funktio, näemme että positiivisten luonnollisten lukujen jonon $1, 2, 3, \ldots$ generoiva funktio on $\frac{1}{(1-x)^2}$. Edellisen nojalla luonnollisten lukujen jonon $0, 1, 2, 3, \ldots$ generoiva funktio on $\frac{x}{(1-x)^2}$.

(b) Jonon $1, 1, 1, \ldots$ generoivalla funktiolla $\frac{1}{1-x}$ on integraalifunktio $-\ln(1 - x) = \ln \frac{1}{1-x}$. Koska jonon $a_0, a_1, \ldots$ generoivalla funktiolla on integraalifunktiona jonon $0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \ldots$ generoiva funktio, näemme että jonon $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ generoiva funktio on $\ln \frac{1}{1-x} - c$ jollain $c \in \mathbb{R}$; koska $\ln \frac{1}{1-0} = 0$, päättelemme, että jonon $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ generoiva funktio on $\ln \frac{1}{1-x}$.

(c) Funktio $F(x) = (1 + x)^n$ on generoiva funktio jonolle $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$, sillä Binomilauseen II 3.9 nojalla

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \ldots$$

(Huomaa, että $\binom{n}{k} = 0$, kun $k > n$.) $\square$

Analyysin oppikirjoista löytyy tuloksia, joiden avulla voi perustella funktioiden esittämistä potenssisarjojen avulla. Tässä voimme kuitenkin sivuuttaa tarkemmat perustelut. Näimme edellä, että jos funktiolla f on potenssisarjakehitelmä $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ jossain 0:n ympäristössä $\{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$, niin sarjan kertoimet saadaan kaavasta $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. Koska meidän ei tarvitse huolehtia suppenemiskysymyksistä, voimme seuraavassa olettaa, että 0:n ympäristössä äärettömän monta kertaa derivoituva funktio g on lukujonon $g(0), g'(0), \frac{1}{2}g''(0), \ldots, \frac{1}{n!}g^{(n)}(0), \ldots$ generoituva funktio.

Esimerkiksi funktio $g(x) = (1+x)^r$ on äärettömän kertaa derivoituva joukossa $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$. Koska jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $g^{(n)}(0) = r(r-1)\cdots(r-n)$, voimme päätellä, että $(1+x)^r$ on jonon $1, r, r(r-1), r(r-1)(r-2), \ldots$ generoiva funktio. Tälle tulokselle tarjoaa täsmällisen perustelun analyysista tunnettu *Newtonin Binomilause*, joka on tavallisen binomilauseen yleistetty muoto reaalisille eksponenteille.

III 2.4 Lause *Olkoon r mielivaltainen reaaliluku. Silloin sarja*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} x^n$$

suppenee tasaisesti kaikilla $x \in]-1,1[$, jolloin sen summa on $(1+x)^r$. $\square$

Newtonin Binomilauseen todistus löytyy useista differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirjoista. (Ks. esim. L. Myrberg, Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 2, s. 137).

III 2.5 Esimerkki Osoita, että lukujonon

$$\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \ldots, \binom{2k}{k}, \ldots$$

generoiva funktio on $F(x) = 1/\sqrt{1-4x}$.

Ratkaisu: Newtonin Binomilauseen avulla voimme kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-k+1)}{k!}(-4x)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{2k-1}{2}}{k!}(-1)^k 4^k x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k \frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{2k-1}{2}}{k!}x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(1\cdot 3\cdots(2k-1))}{k!}x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\cdot 1)(2\cdot 2)\cdots(2\cdot k)(1\cdot 3\cdots(2k-1))}{(1\cdot 2\cdots k)k!}x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(2k-k)!}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k. \quad \square
\end{aligned}
$$

III 2.6 Esimerkki Osoita edellisen esimerkin nojalla, että

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k} = 4^n.$$

Ratkaisu: Edellisen esimerkin nojalla $\binom{2k}{k}$ on termin x^k kerroin lausekkeessa $(1-4x)^{-1/2}$ (kun se kehitetään potessisarjana). Toisaalta $\binom{2n-2k}{n-k}$ on termin x^{n-k} kerroin samassa sarjassa. Tulossa $(1-4x)^{(-1/2)}(1-4x)^{(-1/2)} = (1-4x)^{-1}$ termin x^n kerroin b_n saadaan sarjan $(1-4x)^{(-1/2)}$ kertoimista a_i:

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}a_i$$

Täten summa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

on termin x^n kerroin sarjassa

$$\frac{1}{1-4x} = 1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3 + \cdots (4x)^k + \cdots,$$

ja kyseinen kerroin on 4^n. $\square$

Palaamme vielä tarkastelemaan toistollisten kombinaatioiden lukumääriä.

III 2.7 Esimerkki (a) Monellako eri tavalla voimme valita viiden valkoisen, kolmen harmaan ja kahden mustan pallon joukosta n palloa?

Ratkaisu: Oletamme tässä, että samanväriset pallot ovat keskenään identtisiä. Etsimme toistollisten kombinaatioiden lukumääriä, kun valittavana on n alkiota joukosta $\{v, h, m\}$ ja joukon alkioilla on toistolukujoukot $T_v = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $T_h = \{0, 1, 2, 3\}$ ja $T_m = \{0, 1, 2\}$.

Merkitsemme a_n:llä kaikkien toistollisten n-kombinaatioiden lukumäärää. Panemme merkille, että $a_n = 0$ kun $n > 10$. Kuten johdannossa, näemme että jonon $a_0, a_1, \ldots$ generoiva funktio on

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)$$

Kun laskemme tulon, saamme generoivan funktion polynomimuotoon:

$$1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 12x^5 + 11x^6 + 9x^7 + 6x^8 + 3x^9 + x^{10}$$

Näemme tästä esimerkiksi, että pallojen joukosta voidaan 11 eri tavalla valita kuusi.

(b) Kuinka monella tavalla voidaan valita k alkiota joukosta $[n]$, jos jokaisen alkion toistoluvut ovat rajoittamattomat (eli $T_i = \mathbb{N}$ jokaisella $i \in [n]$)?

Ratkaisu: Nyt tarkastellaan lauseketta

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Käytämme jälleen Newtonin Binomilausetta ja saamme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}(-1)^k(-1)^k x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.
\end{aligned}$$

Olemme jo edellisessä luvussa todenneet (muilla tavoin), että ko. kombinaatioluku on $\binom{n+k-1}{k}$. $\square$

Tietyissä tilanteissa kannattaa edellä tarkasteltujen “tavallisten” generoivien funktioiden asemasta käyttää hieman eri tavalla määriteltyjä potenssisarjoja.

III 2.8 Määritelmä Olkoon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanomme, että potenssisarja

$$\boxed{a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots}$$

on jonon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *eksponentiaalinen generoiva funktio.*

III 2.9 Esimerkki (a) Käytämme merkintää $P(n,k)$ n-joukon k-permutaatioiden lukumäärälle. Panemme merkille, että $P(n,k) = 0$ kun $k > n$. Edellisen luvun perusteella tiedämme, että $\binom{n}{k} = P(n,k)/k!$ kun $k = 0, \ldots, n$. Binomilauseen nojalla

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n \\ &= 1 + \frac{P(n,1)}{1!} + \frac{P(n,2)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{P(n,n)}{n!} x^n.\end{aligned}$$

Täten $(1+x)^n$ on jonon $P(n,0), P(n,1), \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio.

(b) Differentiaali- ja integraalilaskennasta tiedämme, että eksponenttifunktiolla e^x on koko $\mathbb{R}$:ssä voimassa oleva potenssisarjakehitelmä

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots .$$

Täten *funktio* e^x *on jonon* $1, 1, 1, \ldots$ *eksponentiaalinen generoiva funktio.* □

Määrittelemme myös eksponentiaaliset generoivat funktiot "muodollisina" potenssisarjoina ja niidenkin yhteydessä voimme jättää suppenemiskysymykset huomiotta.

Eksponentiaalisten generoivien funktioiden tapauksessa derivaatta ja tulo määräytyvät eri lailla kuin tavallisten generoivien funktioiden yhteydessä (koska haluamme, että lopputuloskin on eksponentiaalinen generoiva funktio).

Eksponentiaalisten generoivien funktioiden $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots$ ja $g(x) = b_0 + b_1 x + \frac{b_2}{2} x^2 + \cdots + \frac{b_n}{n!} x^n + \cdots$ lineaarikombinaatiot määräytyvät samoin kuin tavallisten generoivien funktioiden tapauksessa, mutta f:n ja g:n tuloksi saadaan nyt lukujonon $c_0, c_1, c_2, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio, missä

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + k a_1 b_{k-1} + \tfrac{(k-1)k}{2} a_2 b_{k-2} + \cdots + k a_{k-1} b_1 + a_k b_0\,.$$

Olkoon $f(x) = a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$ lukujonon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio. Generoivan funktion $f(x)$ derivaatta saadaan derivoimalla sarjaa $a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$ termeittäin ja tällöin derivaataksi tulee jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio. Toisinsanoen

$$f'(x) = a_1 + a_2x + \frac{a_3}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n+1}}{n!}x^n + \cdots .$$

Derivoimalla eksponentiaalista generoivaa funktiota $f(x) = a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$ toistuvasti, saamme esitettyä jonon $a_0, a_1, \ldots$ termit derivaattojen $f^{(n)}(0)$ avulla: $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0)$ ja yleisesti $a_n = f^{(n)}(0)$. Jättämällä jälleen suppenemistarkastelut huomiotta, voimme seuraavassa olettaa, että 0:n ympäristössä äärettömän monta kertaa derivoituva funktio g on lukujonon $g(0), g'(0), g''(0), \ldots, g^{(n)}(0), \ldots$ eksponentiaalinen generoituva funktio.

Jonon $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eksponentiaalisella generoivalla funktiolla $a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$ on integraalifunktio $a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n!}x^n + \cdots$ ja tämä on jonon $0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio.

III 2.10 Esimerkki Osoitamme, että jonon $1, 3, 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio on $(1 - 2x)^{-3/2}$.

Olkoon $g(x) = (1 - 2x)^{-3/2}$. Funktio g on äärettömän monta kertaa derivoituva jokaisella $x \neq \frac{1}{2}$, joten yllä esitetyn nojalla riittää näyttää, että g:n derivaatat pisteessä 0 muodostavat jonon $1, 3, 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, \ldots$. On voimassa $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$. Derivoimalla g:tä saamme

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{3}{2} \cdot -2(1-2x)^{-5/2} = 3(1-2x)^{-5/2} \\
g''(x) &= -\frac{3 \times 5}{2} \cdot -2(1-2x)^{-7/2} = (3 \times 5)(1-2x)^{-7/2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g^{(n)}(x) &= -\frac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{2} \cdot -2(1-2x)^{-(2n+3)/2} \\
&= (3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1))(1-2x)^{-(2n+3)/2}.
\end{aligned}$$

Täten $g^{(n)}(0) = 3 \times 5 \times \cdots (2n + 1)$. Väite seuraa tästä. □

Eksponentiaalisten generoivien funktioiden käyttökelpoisuus perustuu muun muassa siihen, että lukujonon $a_0, a_1, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio saattaa supeta (jossain 0:n ympäristössä) vaikka jonon tavallinen generoiva funktio hajaantuisi jokaisella $x \neq 0$. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että $|\frac{a_n}{n!}x^n| \leq |a_n x^n|$ kaikilla n ja x.

Toinen syy eksponentiaalisten generoivien funktioiden käyttökelpoisuudelle on, että ne "toimivat hyvin" permutaatioiden kanssa. Esimerkissä III 2.1 osoitimme, miten tavallisia generoivia funktioita voidaan käyttää kombinaatioiden lukumäärien määrittämisessä. Annamme nyt esimerkin eksponentiaalisen generoivan funktion käytöstä permutaatioiden lukumäärien määrittämisessä.

III 2.11 Esimerkki Tarkastelemme sellaisia korkeintaan nelikirjaimisia sanoja, joita voi muodostaa sanan *tasatasat* kirjaimista, kun vaaditaan, että sanassa on ainakin yksi a ja yksi t?

Kirjaimen a esiintymien eksponentiaalinen polynomi on $a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{24}a^4$ ja vastaavasti, kirjaimen t esiintymien eksponentiaalinen polynomi on $t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$. Kirjaimen s esiintymien eksponentiaalinen polynomi on $1 + s + \frac{1}{2}s^2$.

Kun kerromme auki tulopolynomin

$$\left(a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{24}a^4\right)\left(t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)\left(1 + s + \frac{1}{2}s^2\right)$$

ja poimimme erikseen korkeintaan neliasteiset termit, saamme tulokseksi

$$at + ats + \frac{1}{2}a^2t + \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}at^2s + \frac{1}{6}at^3 + \frac{1}{2}ats^2 + \frac{1}{4}a^2t^2 + \frac{1}{2}a^2ts + \frac{1}{6}a^3t\,.$$

Muutamme tuloksen "eksponentiaaliseen muotoon", jolloin saamme lausekkeen

$$\frac{1}{2!}(2!at) + \frac{1}{3!}\left(3!ats + \frac{3!}{2}a^2t + \frac{3!}{2}at^2\right)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{4!}{2}at^2s + \frac{4!}{6}at^3 + +\frac{4!}{2}ats^2 + \frac{4!}{4}a^2t^2 + \frac{4!}{2}a^2ts + \frac{4!}{6}a^3t\right)\,.$$

Huomaamme, että yllä termien kertoimet voidaan esittää multinomikertoimina:

$$\tfrac{1}{2!}\left[\tbinom{2}{11}at\right] + \tfrac{1}{3!}\left[\tbinom{3}{111}ats + \tbinom{3}{21}a^2t + \tbinom{3}{12}at^2\right]$$

$$+\tfrac{1}{4!}\left[\tbinom{4}{121}at^2s + \tbinom{4}{13}at^3 + \tbinom{4}{121}at^2s + \tbinom{4}{112}ats^2 + \tbinom{4}{22}a^2t^2 + \tbinom{4}{211}a^2ts + \tbinom{4}{31}a^3t\right]\,.$$

Nyt kullakin termillä $a^i t^j s^k$ on kertoimena multinomikerroin $\binom{i+j+k}{i\ j\ k}$ ja aikaisemmin olemme nähneet, että kyseinen kerroin ilmoittaa, kuinka monella eri tavalla on mahdollista permutoida sanaa, jossa on i a:ta, j t:tä ja k s:ää.

Mikäli olemme vain kiinnostuneita määrätynpituisten sanojen lukumääristä, voimme sijoittaa a:n, t:n ja s:n tilalle symbolin x, jolloin saamme polynomin

$$\tfrac{1}{2!}\left[\binom{2}{11}\right]x^2 + \tfrac{1}{3!}\left[\binom{3}{111}+\binom{3}{21}+\binom{3}{12}\right]x^3$$
$$+\tfrac{1}{4!}\left[\binom{4}{121}+\binom{4}{13}+\binom{4}{112}+\binom{4}{22}+\binom{4}{211}+\binom{4}{31}\right]x^4\,,$$

eli polynomin

$$\frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 + \frac{50}{4!}x^4\,.$$

Tässä termin x^k kertoimesta nähdään, montako halutunlaista k-kirjaimista sanaa ($k \le 4$) on mahdollista muodostaa sanan *tasatasat* kirjaimista: esimerkiksi nelikirjaimisia sanoja on 50 kappaletta. □

III 2.12 Esimerkki Kuinka monella tavalla voimme permutoida 2-alkioisen joukon alkioita, jos ensimmäisen alkion toistoluvut ovat $0, 1, 2$ ja toisen $0, 1, 2, 3$?

Ratkaisu: Eksponentiaalinen generoiva funktio on

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) =$$

$$1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+$$
$$\left(\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}\right)x^4+\left(\frac{1}{2!3!}\right)x^5.$$

Täten esim. 4-permutaatioita on $4! \times (\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}) = 10$ kpl. □

Joukon $[n]$ k-permutaatioiden lukumäärä, kun toistoluvut ovat rajoittamattomat, saadaan eksponentiaalisesta generoivasta funktiosta

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^k.$$

Seuraavan esimerkin kaltaisia tehtäviä olemme aikaisemmin käsitelleet summa- ja erotusperiaatteen avulla.

III 2.13 Esimerkki Kuinka monta sellaista k-sanaa, jossa jokainen symboleista A, B, C esiintyy ainakin kerran, voidaan muodostaa aakkoston $\{A, B, C, D\}$ yli?

Ratkaisu: Kyseiset k-sanat määräytyvät sellaisista joukon [4] k-permutaatioista, joissa lukujen $1, 2$ ja 3 toistoluvut ovat $1, 2, 3, \ldots$ ja luvun 4 toistoluvut ovat $0, 1, 2, 3, \ldots$. Täten vastaava eksponentiaalinen generoiva funktio on

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$
$$= (e^x - 1)^3 e^x = (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)e^x$$
$$= e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k - 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k - 1}{k!} x^k,$$

joten kysytty luku on $4^k - 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k - 1$. □

III 2.14 Esimerkki Monessako kirjaimista A, B, C ja D muodostuvassa k-sanassa on parillisen monta A-kirjainta?

Ratkaisu: Eksponentiaalinen generoiva funktio symbolin A esiintymille on

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Koska muiden symbolien esiintymille ei ole asetettu rajoituksia, on niillä generoivat funktiot e^x (ks. edellisiä esimerkkejä). Täten haluttu generoiva funktio on

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})e^x e^x e^x = \frac{1}{2}(e^{4x} + e^{2x}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(4^k + 2^k)}{k!} x^k,$$

ja näin ollen haluttu luku on $(4^k + 2^k)/2$. □

Sovellamme lopuksi (tavallisia) generoivia funktioita edellisessä luvussa määriteltyjen luonnollisten lukujen partitioiden tarkasteluun. Merkitsemme p_n:llä luvun n kaikkien partitioiden lukumäärää.

Esitämme luvun n partitiot seuraavassa summalausekkeina $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_\ell$, missä $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_\ell$.

Selvästi luku 1 voi esiintyä k kertaa luvun n partitiossa vain yhdellä tavalla (kun $0 \leq k \leq n$) tai ei lainkaan (kun $k > n$). Täten polynomi

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

on luvun 1 esiintymien tavallinen generoiva funktio. Samoin

$$F_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^s + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

on tavallinen generoiva funktio luvun 1 esiintymille rajoittamattoman suurten lukujen n partitioissa. Generoiva funktio luvun 2 esiintymille on puolestaan

$$F_2(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2s} + \cdots = \frac{1}{1-x^2},$$

missä x^2 vastaa yhtä kakkosta, x^6 vastaa kolmea kakkosta jne. (Huomaa, että luku 2 voi esiintyä luvun n partitiossa k kertaa vain yhdellä tavalla, kunhan ensin ykkösten esiintymien lukumäärä on kiinnitetty!) Vastaavalla tavalla määrittelemme funktion F_k mielivaltaiselle luvulle k:

$$F_k(x) = 1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{sk} + \cdots = \frac{1}{1-x^k}.$$

Muodostamme funktioiden $F_1, \ldots, F_n$ tulon:

$$F_1(x) \cdots F_n(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^n} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}.$$

Tämän lausekkeen sarjakehitelmän termit saadaan tulosta

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 \cdots) \cdots (1 + x^n + x^{2n} + \cdots).$$

Kun kerromme tulon $F_1 \cdots F_n$ auki, saamme termejä $x^{\ell_1 \cdot 1} x^{\ell_2 \cdot 2} \cdots x^{\ell_n \cdot n}$ ja tällainen termi vastaa sitä luvun $m = \ell_1 + \ell_2 \cdot 2 + \cdots + \ell_n \cdot n$ partitiota, jossa on ℓ_1 ykköstä, ℓ_2 kakkosta,$\ldots, \ell_n$ n:ää. Saamme näin bijektiivisen vastaavuuden edellämainitun kaltaisten aukikerrotun jonon termien ja sellaisten luvun ℓ partioiden välille, joissa jokainen yhteenlaskettava on $\leq n$. Kun yhdistämme aukikerrotun tulon samanasteiset termit, saamme potenssisarjan, jossa termin x^ℓ kerroin ilmoittaa monellako tavalla ℓ voidaan esittää summana luvuista, joista jokainen on $\leq n$; jos $\ell \leq n$, niin tällöin x^ℓ:n kerroin ilmoittaa ℓ:n *kaikkien* partitioden lukumäärän $p(\ell)$.

III 2.15 Esimerkki Laske tulon $F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)$ sarjakehitelmän 8 ensimmäistä termiä.

Ratkaisu: Saamme termien $x^0, x^1, \ldots, x^7$ kertoimet sarjakehitelmässä muodostamalla seuraavan polynomitulon

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)(1+x^4) =$$

$$(1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\cdots)(1+x^3+x^4+x^6+x^7+x^{10}) =$$

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+\cdots$$

Tästä nähdään esimerkiksi, että $p_4 = 5$ ja että luvulla 7 on 11 sellaista partitiota, joissa yhteenlaskettavat ovat ≤ 4. □

Päättymätön tulo

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

on jonon $p(0), p(1), p(2), p(3), \ldots$ generoiva funktio. (Lukija voi helposti osoittaa, että tulon sarjakehitelmän termien $x^0, \ldots, x^n$ kertoimet määräytyvät jo päättymättömän tulon $n+1$ ensimmäisestä tekijästä, joten väite on voimassa ilman suppenemistarkasteluja.)

Vastaavasti funktion

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}$$

kehitelmässä termin x^k kerroin on luvun k "parillisten partitioiden" lukumäärä. Sanomme, että partitio $k_1+\cdots+k_\ell$ on *parillinen (pariton)*, jos jokainen k_i on parillinen (pariton).

III 2.16 Esimerkki Polynomin

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n) \tag{†}$$

termin x^k kerroin antaa lukumäärän niille luvun $k \leq n$ partitioille, joissa kaikki yhteenlaskettavat ovat eri lukuja. Toisaalta x^n:n kerroin polynomissa (†) on sama kuin x^n:n kerroin päättymättömän tulon

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^k)\cdots$$

kehitelmässä. Voimme kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \\
&= \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} \cdot \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1-x^2} \cdot \frac{(1+x^3)(1-x^3)}{1-x^3} \cdots \\
&= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \cdots \cdot \frac{1-x^{2n}}{1-x^n} \cdots \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.
\end{aligned}
$$

Yllä viimeisin lauseke on generoiva funktio jonolle $p^o(0), p^o(1), p^o(2), \ldots$, missä $p^o(n)$ on luvun n parittomien partitioiden lukumäärä. Luonnollisen luvun voi siis esittää yhtä monella tavalla erisuurten osien summana kuin parittomien osien summana.

Koska

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) =$$

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+3x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15},$$

näemme esimerkiksi, että luvulla 5 on kolme paritonta partitiota ($5 = 5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+3$) ja luku 11 voidaan esittää kahdella tavalla lukua 6 pienempien erisuurten osien summana ($11 = 2+4+5 = 1+2+3+5$). □

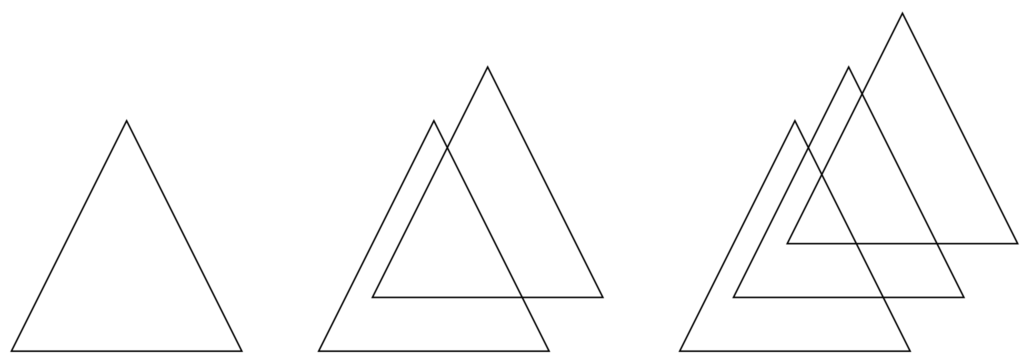
III 3. Rekursioyhtälöt.

Diskreetisssä matematiikassa esiintyvät kombinatoriset funktiot ja algoritmit johtavat usein palautuskaavoihin eli *rekursioyhtälöihin*, joita olemme tavanneet jo aikaisemmin; esimerkkeinä ovat Pascalin kaava binomikertoimille (Lause II 3.7) ja ositusten lukumääriä koskeva Lause II 4.2. Monet kombinatoriset ongelmat voidaan joko esittää tai yksinkertaistaa palautuskaavojen avulla. Ongelmaan sisältyvän rekursion hyväksikäyttö on usein sopiva menetelmä ongelman ratkaisemiseksi – tämä koskee niin puhtaan matemaattisia kuin laskennallisiakin (tietojenkäsittelyn) ongelmia. Laskennalliset algoritmit on usein annettu palautuskaavan muodossa, ja tällaisen algoritmin kompleksisuuden arviointi edellyttää siihen liittyvän rekursioyhtälön tai rekursioepäyhtälön arviointia. Tässä luvussa tarkastelemme yleisten rekursioyhtälöiden ratkaisemista ja keskitymme ns. lineaariseen vakiokertoimiseen tapaukseen.

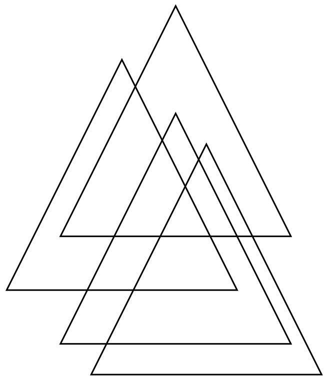
Tarkastelemme aluksi seuraavaa, tason $\mathbb{R}^2$ geometriaan liittyvää esimerkkiä. Olkoon tasoon piirretty n tasasivuista kolmiota, joista mitkä tahansa kaksi eri kolmiota leikkaavat toisensa täsmälleen kahdessa pisteessä ja mitkään kolme eri kolmiota eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Kuinka moneen osaan kolmioiden leikkaukset jakavat tason? (Kolmiolla tarkoitetaan tässä kolmion reunaviivaa.) Pian osoitamme, että osien lukumäärä riippuu vain kolmioiden lukumäärästä n. Täten voimme merkitä lukumäärää symbolilla $L(n)$, ja L on funktio, jolle haluamme löytää lausekkeen.

Huomautamme tässä, että kun $\mathcal{K}$ on äärellinen kokoelma tasokolmioita, niin "osat", joihin $\mathcal{K}$ jakaa tason, ovat sellaisia tasoalueita (eli avoimia ja yhtenäisiä tasojoukkoja) O, joiden reuna $\partial(O)$ sisältyy joukkoon $\bigcup\mathcal{K}$. Kokoelman $\mathcal{K}$ määrittämä "tason jako" on kaikkien osien muodostama perhe $\mathcal{O}$; sitä voidaan luonnehtia sellaisena perheenä $\mathcal{D}$ keskenään erillisiä tasoalueita, että $\bigcup\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\mathcal{K}$ ja $\bigcup\{\partial(D) : D \in \mathcal{D}\} = \bigcup\mathcal{K}$.

Kun piirrämme kuvat kolmesta ensimmäisestä tapauksesta (siis $n = 1, 2, 3$),



huomaamme, että tapauksessa $n = 1$ osia on kaksi, tapauksessa $n = 2$ osia on neljä ja tapauksessa $n = 3$ kolmiot jakavat tason kahdeksaan osaan. Siis $L(n) = 2^n$, kun $n = 1, 2, 3$. Tämän perusteella voisi joku uskaltautua päättelemään, että yhtälö $L(n) = 2^n$ on yleisesti voimassa. Tämä lauseke osoittautuu kuitenkin vääräksi, kun piirrämme neljännen tapauksen, jossa tason osia on "vain" 14 kpl:



Yleisen lausekkeen löytämiseksi voimme käyttää induktiota kolmioiden lukumäärän n suhteen. Tapauksessa $n = 1$ osia on selvästikin kaksi, eli $L(1) = 2$. Olkoon nyt $n > 1$ sellainen luonnollinen luku, että luku $L(n-1)$ on tunnettu. Määritämme luvun $L(n)$ luvun $L(n-1)$ avulla. Olkoot $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ tason (tasasivuisia) kolmioita, jotka leikkaavat toisiaan sovitulla tavalla.

Induktio-oletuksen nojalla kolmiot $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ jakavat tason $L(n-1)$:een osaan; merkitsemme näiden osien muodostamaa kokoelmaa $\mathcal{O}$:lla. Kolmiot $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ leikkaavat kolmiota Δ_n yhteensä $2(n-1)$:ssä pisteessä ja nämä pisteet jakavat kolmion Δ_n $2(n-1)$:een janaan tai murtoviivaan $m_1, \ldots, m_{2(n-1)}$.

Määrittelemme nyt rekursiivisesti sellaiset tason jaot $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots \mathcal{O}_{2(n-1)}$, että jokaisella i on voimassa $\bigcup\{\partial(O) : O \in \mathcal{O}_i\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i \cup \{m_j : j \in [i]\}$. Ehto toteutuu arvolla $i = 0$ kun asetamme $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$. Jos $0 < k \leq 2(n-1)$ ja $\mathcal{O}_{k-1}$ on jo määritelty, niin määrittelemme $\mathcal{O}_k$:n seuraavasti. Murtoviiva m_k kohtaa joukon $\bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i \cup \{m_j : j \in [k-1]\}$ vain päätepisteissään ja tästä seuraa, että perheessä $\mathcal{O}_{k-1}$ on täsmälleen yksi alue O_k, jonka sisällä m_k kulkee (päätepisteitään lukuunottamatta). Viiva m_k jakaa O_k:n kahdeksi alueeksi U_k ja V_k. Huomaamme, että $\partial(U_k) \cup \partial(V_k) = \partial(O_k) \cup \{m_k\}$. Voimme nyt valita $\mathcal{O}_k$:ksi perheen $\big(\mathcal{O}_{k-1} \setminus \{O_k\}\big) \cup \{U_k, V_k\}$. Panemme merkille, että $|\mathcal{O}_k| = |\mathcal{O}_{k-1}| + 1$.

Olemme nyt määritelleet perheet $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_{2(n-1)}$ rekursiivisesti. Tason jaolle $\mathcal{O}_{2(n-1)}$ pätee, että

$$\bigcup\{\partial(O) : O \in \mathcal{O}_i\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i \cup \{m_j : j \in [2(n-1)]\} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i\,.$$

Täten $\mathcal{O}_{2(n-1)}$ koostuu niistä osista, joihin kolmiot $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ jakavat tason. Koska $|\mathcal{O}_0| = |\mathcal{O}| = L(n-1)$ ja $|\mathcal{O}_k| = |\mathcal{O}_{k-1}| + 1$ jokaisella $0 < k \leq 2(n-1)$, on voimassa

$|\mathcal{O}_{2(n-1)}| = |\mathcal{O}_0| + 2(n-1) = L(n-1) + 2(n-1)$. Olemme osoittaneet, että kolmioiden $\Delta_1, ..., \Delta_n$ määrittämässä tason jaossa on $L(n-1) + 2(n-1)$ osaa. Näin ollen jako-osien lukumäärä on riippumaton kolmioiden valinnasta. Edellisen nojalla luku $L(n)$ on hyvin määritelty ja se toteuttaa yhtälön

$$(*) \qquad L(n) = L(n-1) + 2(n-1).$$

Lukujen $L(n)$ arvot voitaisiin nyt helposti laskea rekursiivisesti, esim. $L(5) = L(4) + 2 \cdot 4 = L(3) + 2 \cdot 3 + 8 = L(2) + 2 \cdot 2 + 14 = L(1) + 2 \cdot 1 + 18 = 22$ jne. Yhtälö $(*)$ voidaan kuitenkin ratkaista *suljetussa* muodossa. Voimme kirjoittaa yksinkertaisesti

$$\begin{aligned} L(n) &= L(n-1) + 2(n-1) = L(n-2) + 2(n-2) + 2(n-1) = \dots \\ &= L(1) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2(n-1) = L(1) + 2(n(n-1)/2) \\ &= 2 + n(n-1)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Edellinen yhtälö $(*)$ on esimerkki “rekursioyhtälöstä”.

Rekursioyhtälö lukujonolle $a_0, a_1, \dots$ on muotoa

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ...)$$

oleva yhtälö, josta a_n voidaan laskea edeltäjiensä avulla (kun $n \geq n_0$).

Nimestään huolimatta rekursioyhtälö ei ole yksittäinen yhtälö vaan ääretön *yhtälöryhmä.*

Rekursioyhtälön *ratkaisemisella* tarkoitetaan sellaisen lukujonon $a_0, a_1, \dots$ löytämistä, jolla jokainen a_n $(n \geq n_0)$ toteuttaa annetun yhtälön.

Rekursioyhtälöt ovat differentiaaliyhtälöiden “diskreettejä vastineita”. Toisinaan analogia tehdään hyvin näkyväksi ottamalla käyttöön “differenssioperaatio” Δ vastaamaan derivaattaoperaatiota; tällöin myös puhutaan usein “differenssiyhtälöstä” eikä “rekursioyhtälöstä”. Analogia rekursioyhtälöiden ja differentiaaliyhtälöiden välillä on niin vahva, että monet tunnetuista differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmistä soveltuvat (sopivasti muunneltuina) myös rekursioyhtälöiden ratkaisemiseen.

Differentiaaliyhtälöt ovat tunnetusti usein hyvin vaikeasti ratkaistavissa ja sama pätee myös rekursioyhtälöihin. Seuraavassa tarkastelemme vain yhtä yksinkertaista rekursioyhtälöiden luokkaa ja näytämme, miten luokan yhtälöille voidaan (ainakin periaatteessa) löytää ratkaisu generoivien funktioiden avulla.

III 3.1 Määritelmä *Lineaarinen vakiokertoiminen rekursioyhtälö* on muotoa

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \tag{\#}$$

oleva rekursioyhtälö jonolle $a_0, a_1, \ldots$, missä $k > 0$, $c_0, ..., c_k \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0 \neq c_k$ ja $f : \{k, k+1, \ldots\} \to \mathbb{R}$.

Luku k on rekursioyhtälön (#) *kertaluku*. Jono $a_0, a_1, ...$ on yhtälön (#) *ratkaisu*. Yhtälö (#) on *homogeeninen*, mikäli $f \equiv 0$.

Panemme merkille, että yhtälö (#) on yhtäpitävä yhtälön

$$a_n = \frac{1}{c_0}\big(f(n) - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_k a_{n-k}\big) \quad (n \geq k)$$

kanssa. Tästä näemme, että jos *alkuarvot* $a_0, ..., a_{k-1}$ on annettu, niin yhtälöllä (#) on *yksikäsitteinen* ratkaisu $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Näytämme nyt, miten lineaarinen vakiokertoiminen rekursioyhtälö (#) voidaan ratkaista generoivan funktion avulla kun alkuarvot $a_0, ..., a_{k-1}$ on annettu.

Merkitsemme g:llä (toistaiseksi tuntemattoman) lukujonon $a_0, a_1, ...$ generoivaa funktiota. Tarkoituksenamme on etsiä lauseke g:lle käyttämällä hyväksi sitä tietoa, että jono $a_0, a_1, ...$ toteuttaa rekursioyhtälön (#).

Yhtälöryhmä (#) on yhtäpitävä seuraavan yhtälön kanssa:

$$\sum_{n \geq k} \big(c_0 a_n + \cdots + c_k a_{n-k}\big) x^n = \sum_{n \geq k} f(n) x^n \,. \tag{\#\#}$$

Jokaisella $0 \leq i \leq k$ on voimassa

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} c_i a_{n-i} x^n &= c_i x^i \sum_{n \geq k} a_{n-i} x^{n-i} = c_i x^i \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n \Big) \\
&= c_i x^i \Big(g(x) - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n \Big) = c_i x^i g(x) - c_i \sum_{n=i}^{k-1} a_{n-i} x^n \,.
\end{aligned}$$

(Sovimme, että yllä tapauksessa $i = k$ esiintyvien "tyhjien summien" $\sum_{n=0}^{-1}$ ja $\sum_{n=k}^{k-1}$ arvo on 0.) Kun laskemme yhteen edellisen yhtälöketjun vasemmanpuoleiset termit arvoilla $i = 0, ..., k$ ja samoin oikeanpuoleiset termit, saamme yhtälön

$$\sum_{n \geq k} \big(c_0 a_n + \cdots + c_k a_{n-k}\big) x^n = \big(c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k\big) g(x) - \sum_{i=0}^{k} \sum_{n=i}^{k-1} c_i a_{n-i} x^n \,.$$

Edellisen yhtälön vasen puoli on sama kuin yhtälön (##) vasen puoli. Täten saamme yhtälön (##) kanssa yhtäpitävän yhtälön

$$pg - q = F\,,$$

missä on merkitty

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i x^i\,, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{n=i}^{k-1} c_i a_{n-i} x^n \quad \text{ja} \quad F(x) = \sum_{n\ge k} f(n) x^n\,.$$

Huomaamme, että p on k-asteinen polynomi (oletimme, että $c_k \neq 0$) ja q on polynomi, jonka aste on pienempi kuin k. Voimme kirjoittaa q:n lausekkeen myös muotoon $q(x) = \sum_{n=0}^{k-1}\big(\sum_{i=0}^{n} c_i a_{n-i}\big)x^n$.

Koska polynomin p vakiokerroin c_0 on nollasta poikkeava, on funktio $\frac{1}{p}$ määritelty jossain 0:n ympäristössä. Näin ollen voimme ratkaista yhtälön $pg - q = F$ lukujonon $a_0, a_1, \dots$ generoivan funktion g suhteen ja saamme tulokseksi

$$\boxed{g = \frac{1}{p}\big(F + q\big)}$$

Panemme merkille, että generoiva funktio g on *rationaalifunktio* (eli kahden polynomin osamäärä), mikäli rekursioyhtälö (#) on homogeeninen (eli $f \equiv 0$).

Saatu g:n lauseke ei vielä ole sellaisessa muodossa, josta näkisimme luvut a_n termien x^n kertoimina. Saamme g:n tällaiseen muotoon kunhan esitämme funktion $\frac{1}{p}$ potenssisarjana. Tämä onnistuu usein hajoittamalla $\frac{1}{p}$ "osamurtoihin".

Polynomia $r(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$ kutsutaan rekursioyhtälön (#) *karakteriseksi polynomiksi* ja yhtälöä $r(x) = 0$ *karakteriseksi yhtälöksi.*

Koska r on k:nnen asteen polynomi, yhtälöllä $r(x) = 0$ on k juurta (eli ratkaisua); osa juurista voi olla kompleksilukuja ja osa moninkertaisia. Luettelemme juuret muodossa $\alpha_1, ..., \alpha_k$ siten, että ℓ-kertainen juuri esiintyy listassa $\alpha_1, ..., \alpha_k$ ℓ kertaa. Algebran perustulosten nojalla voimme esittää polynomin r muodossa $r(x) = c_0(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_k)$. Toisaalta huomaamme, että jokaisella $x \neq 0$ on voimassa $p(x) = x^k r(\frac{1}{x})$. Näin saamme polynomille p esityksen

$$p(x) = c_0(1 - \alpha_1 x)\cdots(1 - \alpha_k x)\,.$$

Edellisen lausekkeen avulla voimme jo löytää funktiolle $\frac{1}{p}$ potenssisarjaesityksen: on voimassa $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{c_0}\frac{1}{1-\alpha_1 x}\cdots\frac{1}{1-\alpha_k x}$ ja edellisessä luvussa totesimme, että funktiolla $\frac{1}{1-\alpha x}$ on sarjaesitys $1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots$. Näin ollen voimme kirjoittaa $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{c_0}(1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \cdots)\cdots(1 + \alpha_k x + \alpha_k^2 x^2 + \cdots)$ ja tästä saisimme periaatteessa $\frac{1}{p}$:n sarjakehitelmän "aukaisemalla" tulon potenssisarjojen kertosäännön mukaisesti. Tämä johtaisi kuitenkin helposti hankaliin lausekkeisiin ja käytännössä kannattaa yleensä menetellä toisella tavalla.

Kuten edellä näimme, funktio $\frac{c_0}{p}$ voidaan esittää tulona $t(x) = \frac{1}{1-\alpha_1 x}\cdots\frac{1}{1-\alpha_k x}$. Tällainen tulo voidaan *hajoittaa osamurtoihin.* Osamurtohajoitelmassa tulo esitetään äärellisenä summana muotoa $\frac{s}{u}$ olevista lausekkeista, missä s ja u ovat (reaalisia) polynomeja, s:n asteluku on pienempi kuin u:n ja lisäksi u on korkeintaan toista astetta olevan polynomin potenssi. Emme käsittele tässä tarkemmin osamurtohajoitelmia, mutta mainitsemme sen, että jos kaikki luvut $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ovat reaalisia ja toisistaan poikkeavia (toisin sanoen, jos karakteristerisen yhtälön kaikki juuret ovat reaalisia ja yksinkertaisia), niin tällöin tulon t osamurtohajoitelma on muotoa $\frac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \cdots + \frac{A_k}{1-\alpha_k x}$, missä A_i't ovat reaalisia vakioita. Tässä tapauksessa on helppo löytää haluttu osamurtohajoitelma, mikäli luku k on pieni.

Annamme nyt esimerkkejä edellä kuvaillun vakiokertoimisten lineaaristen rekursioyhtälöiden ratkaisumenetelmän käytöstä.

III 3.2 Esimerkki Ratkaise rekursioyhtälö

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

kun $n \geq 2$ ja alkuarvot ovat $a_0 = 1, a_1 = -2$.

Ratkaisu: Olkoon $h(x)$ jonon $a_0, a_1, a_2, \ldots$ generoiva funktio. Kertomalla jonon termejä x:n potensseilla ja summaamalla saamme

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 5a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 6a_{n-2}x^n,$$

joten

$$h(x) - a_1 x - a_0 = 5x(h(x) - a_0) - 6x^2 h(x)$$

ja siis

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1 x - 5a_0 x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Yhtälön $1-5x+6x^2=0$ ratkaisut ovat $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$. Näin ollen on voimassa $1-5x+6x^2=6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})=(1-2x)(1-3x)$ ja siten

$$h(x)=\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}\,.$$

Etsimme edelliselle h:n lausekkeelle osamurtohajoitelman kirjoittamalla

$$\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-3x}\,.$$

Kun kerromme edellisen yhtälön puolittain lausekkeella $(1-2x)(1-3x)$, saamme yhtälön $1-7x=A(1-3x)+B(1-2x)$ eli yhtälön $1-7x=A+B-(3A+2B)x$. Asettamalla viimeisen yhtälön oikean- ja vasemmanpuoliset vakiotermit yhtäsuuriksi sekä x-termien kertoimet yhtäsuuriksi, saamme yhtälöparin

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=7\,. \end{cases}$$

Ratkaisemalla yhtälöparin, saamme $A=5$ ja $B=-4$. Näin ollen on voimassa

$$h(x)=5\frac{1}{1-2x}-4\frac{1}{1-3x}\,.$$

Koska

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots \\ \dfrac{1}{1-3x}=1+3x+9x^2+\cdots+3^nx^n+\cdots\,, \end{cases}$$

saamme generoivalle funktiolle h potenssisarjaesityksen

$$\begin{aligned} h(x)&=5\,(1+2x+\cdots+2^nx^n+\cdots)-4\,(1+3x+\cdots+3^nx^n+\cdots) \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n)x^n\,. \end{aligned}$$

Edellisen nojalla on voimassa $a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n$. $\square$

III 3.3 Esimerkki Kuinka monta sellaista n-sanaa, joissa symboli A esiintyy parillisen monta kertaa, voidaan muodostaa aakkoston $\{A,B,C,D\}$ yli?

Ratkaisu: Merkitään tällaisten n-sanojen lukumäärää symbolilla a_n. Koska tällöin vastaavien $(n-1)$-sanojen lukumäärä on a_{n-1}, ja kaikkien $(n-1)$-sanojen lukumäärä on 4^{n-1}, on siis kaikista $(n-1)$-sanoista $4^{n-1} - a_{n-1}$ sellaisia, joissa A esiintyy parittoman monta kertaa. Olkoon nyt

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$$

sellainen $(n-1)$-sana, jossa A esiintyy parillisen monta kertaa. Tällöin A esiintyy yhtä monta kertaa n-sanoissa

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}B, \ \ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}C \ \text{ ja } \ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}D.$$

Jos toisaalta

$$\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$$

on sellainen $(n-1)$-sana, jossa A esiintyy parittoman monta kertaa, niin A esiintyy n-sanassa

$$\beta_1 \ldots \beta_{n-1}A$$

parillisen monta kertaa. Siis kun $n \geq 2$, on $a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1}$. Saamme täten (epähomogeenisen) rekursioyhtälön $a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}$. Valitsemalla $a_0 = 1$ (huomaa, että $a_1 = 3$) yhtälö on tosi kaikille $n \in \mathbb{N}^*$, ja jo yllä käsiteltyyn tapaan saamme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n \,.$$

Edellisestä seuraa, että jonon $a_0, a_1, \ldots$ generoiva funktio f toteuttaa yhtälön

$$f(x) - 1 - 2xf(x) = \frac{x}{1-4x} \,.$$

Täten

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}\left(\frac{x}{1-4x} + 1\right) = \frac{1-3x}{(1-2x)(1-4x)} \,.$$

Kun etsimme f:lle osamurtohajoitelman samaan tapaan kuin edellisessä esimerkissä, saamme tulokseksi

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-4x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x}$$

joten vastaukseksi saadaan

$$a_n = \frac{1}{2}\left(2^n + 4^n\right) = 2^{n-1} + 2^{2n-1} \,. \qquad \square$$

Olemme tähän mennessä rajoittuneet vakiokertoimisiin lineaarisiin yhtälöihin. Voimme kuitenkin toisinaan käyttää generoivia funktioita hyväksi muunkin tyyppisten rekursioyhtälöiden yhteydessä. Tarkastelemme yhtä esimerkkiä epälineaarisen rekursioyhtälöryhmän ratkaisemisesta.

III 3.4 Esimerkki Kuinka monella tavalla lauseke

$$x_1 + \cdots + x_n$$

voidaan varustaa sulkumerkein siten, että kaikki yhteenlaskuoperaatiot ovat kaksipaikkaisia?

Ratkaisu: Haluamme siis varustaa lausekkeen $x_1 + \cdots + x_n$ suluin siten, että kun yhteenlaskut tehdään sulkujen ilmaisemassa järjestyksessä, niin kaikki suoritettavat laskutoimitukset ovat kaksipaikkaisia; esimerkiksi sulutus $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+(x_5+x_6)$ ei täytä ehtoa, mutta $((x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)) + (x_5 + x_6)$ täyttää. Vaadimme myös, ettei sulutuksessa ole "turhia" sulkuja (esimerkiksi kaksinkertaisia sulkuja). Panemme merkille, että tällöin lausekkeen $x_1 + \cdots + x_n$ sallitussa sulutuksessa on $n - 2$ sulkuparia (kun $n > 1$).

Olkoon a_n lauseketta $x_1 + \cdots + x_n$ vastaava lukumäärä. Sovimme, että $a_0 = 0$. Sovimme myös, että $a_1 = a_2 = 1$ (motivaatio: näissä tapauksissa "tyhjä sulutus" täyttää vaaditun ehdon). Lauseke $x_1 + x_2 + x_3$ voidaan varustaa sulkumerkein seuraavilla kahdella tavalla: $(x_1 + x_2) + x_3$ ja $x_1 + (x_2 + x_3)$. Täten siis $a_3 = 2$.

Olkoon nyt $n > 1$ ja $1 \leq i < n$. Lauseke $x_1 + \cdots x_i$ voidaan varustaa sulkumerkein a_i tavalla, ja $x_{i+1} + \cdots + x_n$ voidaan varustaa sulkumerkein a_{n-i} tavalla. Täten

$$x_1 + \cdots + x_n = (x_1 + \cdots + x_i) + (x_{i+1} + \cdots + x_n)$$

voidaan varustaa edellisistä lähtien $a_i \times a_{n-i}$ tavalla. Koska jokaiselle $i \in [n]$ saadaan erilainen sulkumerkkijono, on tapoja yhteensä

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

kappaletta. (Huomaa, että tämä yhtälö on yleisempi kuin aikaisempien määritelmien mukaiset yhtälöt, sillä tällä rekursiolla ei ole astelukua!) Koska $a_0 = 0$, voimme kirjoittaa edellisen yhtälön muotoon

$$a_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0 \,.$$

Käytämme taas generoivia funktioita. Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0) x^n \,.$$

Olkoon $h(x)$ jonon $a_0, a_1, \ldots$ generoiva funktio $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tällöin $h(x)^2$ on potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \big) x^n$. Täten saamme edellisen yhtälön perusteella yhtälön

$$h(x) - a_1 x - a_0 = h(x)^2 - a_0^2 - (a_1 a_0 + a_0 a_1) x,$$

Koska $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$, saamme yhtälön

$$h(x)^2 - h(x) + x = 0\,.$$

Tämä on tavallinen toisen asteen algebrallinen yhtälö muuttujan $h(x)$ suhteen ja yhtälön ratkaisu on $h(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x})$; tässä on valittava miinusmerkki, koska $h(0) = 0$. Binomilauseen nojalla funktion $\sqrt{1-4x}$ sarjakehitelmän termin x^n, $n > 0$, kerroin on

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-4)^n \\
=&\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-3}{2}}{n!} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot 4^n \\
=&\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!} \cdot (-1) \cdot 2^n \\
=&-\frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{n!(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1))} \\
=&-\frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\
=&-\frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(2n-2-(n-1))!} = -\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Generoivalla funktiolla $h(x)$ on siis sarjakehitelmä $\frac{1}{2}\big(1-(1+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} x^n\big)$ ja näin ollen luvuilla a_n, $n > 0$, on lauseke

$$a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Lukuja a_n kutsutaan *Catalanin luvuiksi.* Nämä luvut esiintyvät monien kombinatoristen ongelmien yhteydessä.

Lopuksi annamme vielä yhden tärkeän esimerkin lineaarisesta vakiokertoimisesta rekursioyhtälöstä ja tarkastelemme myös sen määrittämää lukujonoa hieman yksityiskohtaisemmin.

III 3.5 Esimerkki *Fibonaccin luvut* $f_0, f_1, \ldots$ määräytyvät rekursioyhtälöstä

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

ja alkuarvoista $f_0 = 0$ ja $f_1 = 1$. Kyseessä on toisen kertaluvun homogeeninen vakiokertoiminen lineaarinen rekursioyhtälö. Kurssilla "Johdatus diskreettiin matematiikkaan" on annettu eksplisiittinen lauseke Fibonaccin luvuille ja *todistettu* induktiolla, että annetut luvut toteuttavat alkuarvot ja rekursioyhtälön. Tässä käytämme edellä kuvattua generoivan funktion etsimiseen perustuvaa, vakiokertoimisen lineaarisen rekursioyhtälön ratkaisumenetelmää ja *johdamme* lausekkeen luvuille f_n. Tämä on se menetelmä, jolla Fibonaccin lukujen eksplisiittinen lauseke on aikoinaan löytynyt.

Merkitsemme g:llä lukujonon $f_0, f_1, \ldots$ generoivaa funktiota, jolloin siis $g(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$. Tällöin

$$\begin{aligned}
g(x) &= f_0 + f_1 x + \big(f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots\big) = 0 + 1x + \big((f_1 + f_0)x^2 + (f_2 + f_1)x^3 + \cdots\big) \\
&= x + \Big(\big(f_1 x^2 + f_2 x^3 + \cdots\big) + \big(f_0 x^2 + f_1 x^3 + \cdots\big)\Big) \\
&= x + \Big(x\big(f_1 x + f_2 x^2 + \cdots\big) + x^2\big(f_0 + f_1 x + \cdots\big)\Big) \\
&= x + \Big(x\big(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots\big) + x^2\big(f_0 + f_1 x + \cdots\big)\Big) \\
&= x + \big(xg(x) + x^2 g(x)\big)\,.
\end{aligned}$$

Saamme edellisen nojalla yhtälön $g(x) = x + xg(x) + x^2 g(x)$, josta ratkaisemme

$$\boxed{g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

Seuraavaksi hajoitamme lausekkeen $\frac{x}{1-x-x^2}$ osamurtoihin. Kun ratkaisemme yhtälön $1-x-x^2 = 0$, saamme sen juuriksi luvut $\rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\rho_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Voimme esittää polynomin $1 - x - x^2$ muodossa $-\big(\rho_1 - x\big)\big(\rho_2 - x\big)$. Täten $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(\rho_1-x)(\rho_2-x)}$. Kun etsimme aikaisempien esimerkkien tapaan sellaiset luvut A ja B, että

$$\frac{-x}{(\rho_1 - x)(\rho_2 - x)} = \frac{A}{\rho_1 - x} + \frac{B}{\rho_2 - x}\,,$$

niin päädymme yhtälöpariin

$$\begin{cases} A\rho_2 + B\rho_1 = 0 \\ -A - B = -1\,, \end{cases}$$

josta ratkaisemme $A = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$ ja $B = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$. Koska $\rho_1 - \rho_2 = \sqrt{5}$, saamme $A = \frac{\rho_1}{\sqrt{5}}$ ja $B = -\frac{\rho_2}{\sqrt{5}}$.

Edellisen nojalla on voimassa

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(\rho_1 - x)(\rho_2 - x)} = \frac{\frac{\rho_1}{\sqrt{5}}}{\rho_1 - x} + \frac{-\frac{\rho_2}{\sqrt{5}}}{\rho_2 - x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{x}{\rho_1}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{x}{\rho_2}}.$$

Voimme esittää edellisen yhtälöketjun oikeanpuolimmaisen termin erotuksen tekijät geometrisina sarjoina, jolloin löydämme g:lle sarjakehitelmän:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{x}{\rho_1} + \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{x^3}{\rho_1^3} + \cdots\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{x}{\rho_2} + \frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{x^3}{\rho_2^3} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)x + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right)x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right)x^3 + \cdots$$

On voimassa $\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Täten näemme, että termin x^n kerroin g:n sarjakehitelmässä, eli n:s Fibonaccin luku, on

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Fibonaccin lukujen lausekkeessa esiintyvää lukua $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ merkitään usein ϕ:llä ja sitä kutsutaan *kultaiseksi luvuksi* tai *kultaiseksi suhteeksi*. Nimitys johtuu siitä, että ϕ on koko janan ja pidemmän jako-osan pituuksien suhde, kun jana on jaettu *kultaisessa leikkauksessa* (eli *jatkuvassa suhteessa*), jossa koko janan ja pidemmän jako-osan pituuksien suhde on sama kuin pidemmän ja lyhyemmän jako-osan pituuksien suhde. Luku ϕ esiintyy monissa geometrisissä yhteyksissä. Esimerkiksi säännöllisen viisikulmion lävistäjän ja sivun pituuksien suhde on ϕ. Luku ϕ on likiarvoltaan $1,618\ldots$

Kun merkitsemme $\hat{\phi}$:llä lukua $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, saamme Fibonaccin luvun lausekkeen seuraavaan muotoon:

$$\boxed{f_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}}$$

Luvulla ϕ ja Fibonaccin luvuilla on hyvin läheinen yhteys. Käyttämällä hyväksi Fibonaccin lukujen eksplisiittistä lauseketta sekä edellä johdettua generoivaa funktiota, voimme valaista Fibonaccin lukujen ja luvun ϕ välistä suhdetta.

On voimassa $\hat{\phi} = 1 - \phi \approx -0,618$ ja täten $|\hat{\phi}| < 1$ ja $|\frac{\hat{\phi}}{\sqrt{5}}| < \frac{1}{2}$. Kun panemme lisäksi merkille, että jokaisella $n > 0$ on voimassa

$$|f_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}| = |-\frac{\hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}| = |\frac{\hat{\phi}}{\sqrt{5}}| \cdot |\hat{\phi}^{n-1}| < \frac{1}{2},$$

niin saamme seuraavat tulokset:

– f_n *on se luonnollinen luku, joka on lähimpänä lukua* $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

– $f_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \to 0$ *kun* $n \to \infty$.

– $\frac{f_{n+1}}{f_n} \to \phi$ *kun* $n \to \infty$.

Tarkastelemme lähemmin potensseja ϕ^n ja $\hat{\phi}^n$. Panemme aluksi merkille, että on voimassa $\frac{\phi+2}{\sqrt{5}} = \phi$ ja $\frac{\hat{\phi}+2}{\sqrt{5}} = -\hat{\phi}$. (Tarkista!) Tästä seuraa, että jokaiselle $n > 0$ on voimassa

$$\begin{aligned} \phi^n + \hat{\phi}^n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\phi^{n-1}(\phi+2) - \hat{\phi}^{n-1}(\hat{\phi}+2)\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\phi^n + 2\phi^{n-1} - \hat{\phi}^n - 2\hat{\phi}^{n-1}\Big) \\ &= \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}} + 2\frac{\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = f_n + 2f_{n-1} \end{aligned}.$$

Toisaalta luvun f_n lauseke antaa yhtälön $\phi^n - \hat{\phi}^n = \sqrt{5}f_n$. Yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} \phi^n + \hat{\phi}^n = f_n + 2f_{n-1} \\ \phi^n - \hat{\phi}^n = \sqrt{5}f_n \end{cases}$$

ratkaisemme $\phi^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}f_n + f_{n-1} = f_n\phi + f_{n-1}$ ja $\hat{\phi}^n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}f_n + f_{n-1} = f_n\hat{\phi} + f_{n-1}$. Saamme siis seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} \phi^n = f_n\phi + f_{n-1} \\ \hat{\phi}^n = f_n\hat{\phi} + f_{n-1}\,. \end{cases}$$

Palaamme tarkastelemaan jonon $f_0, f_1, \ldots$ generoivaa funktiota g. Saimme edellä g:lle lausekkeen $g(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{x}{\rho_1}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{x}{\rho_2}}$, missä $\rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\hat{\phi}$ ja $\rho_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\phi$. Kun vielä huomaamme, että $\phi\hat{\phi} = -1$, saamme g:lle esityksen

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\hat{\phi}x}\right)}$$

Annamme lopuksi kaksi esimerkkiä siitä, miten Fibonaccin lukujen ominaisuuksia voidaan johtaa generoivan funktion g avulla.

Kun kirjoitamme g:n lausekkeen $\frac{x}{1-x-x^2}$ muotoon $x\frac{1}{1-x(1+x)}$ ja käytämme päättymättömän geometrisen summan kaavaa, saamme g:lle esityksen

$$g(x) = x + x^2(1+x) + x^3(1+x)^2 + x^4(1+x)^3 + \cdots .$$

Kun avaamme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ potenssin $(1+x)^n$ binomikaavan mukaisesti ja kerromme tuloksen x^{n+1}:llä, saamme esitettyä g:n summana, jossa esiintyy termejä x^k kertoimineen: x^k ei esiinny "avatuissa" lausekkeissa $x^{n+1}(1+x)^n$ kun $n \geq k$ tai $n < \frac{k}{2}-1$, mutta jokaisella $\frac{k}{2}-1 \leq n < k$ avatussa lausekkeessa $x^{n+1}(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i+n+1}$ on termi $\binom{n}{k-n-1}x^k$. Kun laskemme yhteen kaikkien x^k-termien kertoimet, saamme x^k:n kertoimen g:n potenssisarjaesityksessä, eli Fibonaccin luvun f_k. Koska olemme sopineet, että $\binom{i}{j} = 0$ kun $i < j$, saamme Fibonaccin luvuille seuraavan esityksen:

$$\boxed{f_k = \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \cdots + \binom{k-i}{i-1} + \cdots}$$

Funktiolle g^2 on voimassa

$$g^2(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\hat{\phi}x}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi x)^2} + \frac{1}{(1-\hat{\phi}x)^2} - \frac{2}{(1-\phi x)(1-\hat{\phi}x)}\right)$$

ja käyttämällä yhtälöitä $\phi + \hat{\phi} = 1$ ja $\phi\hat{\phi} = -1$ (tarkista, että ne pätevät!), saamme $g^2(x)$:n lausekkeen muotoon

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi x)^2} + \frac{1}{(1-\hat{\phi}x)^2} - \frac{2}{1-x-x^2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi x)^2} + \frac{1}{(1-\hat{\phi}x)^2} - 2\frac{g(x)}{x}\right).$$

Kirjoitamme $g^2(x)$:n sarjakehitelmän muotoon $g^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ja määritämme edellisen $g^2(x)$:n lausekkeen avulla kertoimet c_n.

Koska funktio $\frac{1}{(1-ax)^2}$ on funktion $\frac{1}{a}\frac{1}{1-ax}$ derivaatta ja funktiolla $\frac{1}{1-ax}$ on sarjakehitelmä $1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots$, niin funktiolla $\frac{1}{(1-ax)^2}$ on sarjakehitelmä $\frac{1}{a}(a + 2a^2x + 3a^3x^2 + \cdots) = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + \cdots$ Korvaamalla yllä viimeisimmässä $g^2(x)$:n lausekkeessa esiintyvät termit $\frac{1}{(1-\phi x)^2}$, $\frac{1}{(1-\hat{\phi}x)^2}$ ja $-2\frac{g(x)}{x}$ niiden sarjakehitelmillä, saamme esitettyä $g^2(x)$:n sarjakehitelmän kertoimet muodossa

$c_n = \frac{1}{5}\big((n+1)\phi^n + (n+1)\hat{\phi}^n - 2f_{n+1}\big)$. Käyttämällä aikaisemmin johtamaamme yhtälöä $\phi^n + \hat{\phi}^n = f_n + 2f_{n-1}$, saamme luvun c_n lausekkeen muotoon

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{5}\big((n+1)(f_n + 2f_{n-1}) - 2f_{n+1}\big) \\ &= \frac{1}{5}\big((n+1)(f_n + 2f_{n-1}) - 2(f_n + f_{n-1})\big) = \frac{1}{5}\big((n-1)f_n + 2nf_{n-1}\big) . \end{aligned}$$

Toisaalta potenssisarjojen tulosäännön nojalla pätee, että

$$g^2(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_x x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k}\Big)x^n$$

ja siis $c_n = \sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k}$. Näin ollen jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k} = \tfrac{1}{5}\big((n-1)f_n + 2nf_{n-1}\big)}$$

HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN III

1. Merkitse e_n:llä n-joukon kaikkien epäjärjestelyjen lukumäärää ja pane merkille, että $e_0 = 1$, $e_1 = 0$ ja $e_2 = 1$. Näytä kombinatorisella päättelyllä (ja siis käyttämättä lauseketta $e_n = n! \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!}$), että jokaisella $n > 2$ on voimassa palautuskaava

$$e_n = (n-1)(e_{n-1} + e_{n-2}) .$$

   [Ohje: kiinnitä $i \in [n-1]$ ja mieti, monellako $[n]$:n epäjärjestelyllä ϕ on voimassa $\phi(n) = i$.]

2. Johda kombinatorisella päättelyllä edellisen tehtävän lukuja e_i koskeva yhtälö

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{k!(n-k)!} = 1 .$$

3. Olkoon X n-joukko, missä $n > 1$, ja $\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$. Monellako eri tavalla voidaan perheen $\mathcal{A}$ joukoille valita erilliset edustajat?

   [Vihje: *epäjärjestely*.]

4. Montako eri sanaa voidaan muodostaa sanan SALAISUUS kirjaimista järjestelemällä ne uudelleen?

5. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan MATEMATIIKKA kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, ettei sanaan saa tulla kahta A:ta vierekkäin?

   [Ohje: järjestä ensin muut kirjaimet jonoon ja sijoita sitten A:t paikoilleen]

6. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan KOMBINATORIIKKA kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, ettei sanaan saa tulla kahta samaa kirjainta vierekkäin?
   (Esimerkiksi TORINABIKOMKIKA kelpaa, mutta MOTORIIKANKABIK ei.)

7. Varastossa on kymmentä eri kirjaa kaksi kappaletta kutakin. Kuinka monella eri tavalla kirjat voidaan jakaa henkilöiden A,B,C ja D kesken kun vaaditaan, ettei kenellekään saa tulla kahta kappaletta samaa kirjaa?

8. Rasiassa on neljä punaista, kolme sinistä, kaksi keltaista ja yksi vihreä pallo. Oletamme, että samanväriset pallot eivät eroitu toisistaan. Monellako eri tavalla voidaan rasiasta valita neljä palloa kun
   (a) valintajärjestys huomioidaan?
   (b) valintajärjestystä ei oteta huomioon?

9. Monellako tavalla voidaan 5 punaisen, 5 sinisen ja 5 keltaisen pallon joukosta valita 10 palloa kun vaaditaan, että kunkin värisiä palloja on valittava ainakin kaksi kappaletta ja
   (a) valintajärjestys huomioidaan;
   (b) valintajärjestystä ei huomioida?

10. Lipastossa on neljä laatikkoa päällekkäin. Monellako eri tavalla yhdeksän eriväristä nappia voidaan sijoittaa lipastoon niin, että ylimmässä laatikossa on pariton määrä nappeja ja kussakin muussa laatikossa parillinen määrä? (Huom: Nolla on parillinen.)

11. Määritä luvun 20 14-partitioiden lukumäärä $p_{14}(20)$.

    [Ohje: palautuskaava.]

12. Pelissä heitetään yhtä aikaa kuutta keskenään identtistä noppaa. Monellako eri tavalla voidaan heitossa saada pistesummaksi 13?

    [Huom: kukin kuudesta nopasta antaa heitossa 1-6 pistettä.]

13. Laske niiden luonnollisten lukujen muodostamien n-jonojen $(x_1, \ldots, x_n)$ lukumäärä, joille pätee
    $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$
    (n ja r ovat luonnollisia lukuja). Laske tämän perusteella, kuinka monen positiivisen kokonaislukukolmikon (k_1, k_2, k_3) läpi avaruuden R^3 taso $x + y + z = r$ kulkee.

14. Muodosta tavallinen generoiva funktio lukujonolle $a_0, a_1, a_2, \ldots$, missä a_k on niiden aakkoston $\{A, B, C\}$ yli muodostettujen k-sanojen lukumäärä, joissa symboli A esiintyy parillisen monta kertaa.

15. Etsi jonon $1, 1 \times 4, 1 \times 4 \times 7, 1 \times 4 \times 7 \times 10, \ldots$ eksponentiaalinen generoiva funktio.

16. Laske (generoivien funktioiden avulla) summat

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}, \tag{1}$$

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}, \tag{2}$$

kun n, m ja k ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja lausekkeessa (2) $0 \leq k \leq \min(m, n)$.

17. Osoita generoivien funktioiden avulla, että jokainen $n > 0$ voidaan esittää yksikäsitteisesti eri lukujen 2^i summana. Ohje: todenna lauseke

$$\frac{1}{1-X} = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8)\ldots$$

tarkastelemalla funktiota

$$(1-X)(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\ldots.$$

18. Osoita, että $p_{r+k}(2r+k)$ on riippumaton luvusta k.

19. Esitä seuraavat summalausekkeet suljetussa muodossa:

   1) $\sum_{m>1}(2m+7)/5^m$;
   2) $\sum_{m=1}^{\infty}(m^2+3m+2)/m!$;
   3) $\sum_{m\geq 3}\log 6^m/m!$.

20. Esitä summalauseke

$$\sum_{k=0}^{m} k(k+1)(k+2)$$

suljetussa muodossa.

21. Ratkaise rekursioyhtälö

$$a_n + 2a_{n-1} = n + 3\,.$$

22. Piirretään ympyrä ja n suoraa tasoon $\mathbb{R}^2$. Jokainen suorista leikkaa muut suorat ympyrän sisällä. Jos mitkään kolme suoraa eivät leikkaa samassa pisteessä, niin kuinka moneen osaan suorat jakavat ympyrän?

23. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt:

i)	$x_{n+1} = x_n + 3$	$(n \geq 0;\ x_0 = 1)$
ii)	$x_{n+1} = x_n/3 + 2$	$(n \geq 0;\ x_0 = 0)$
iii)	$x_{n+1} = 2nx_n + 1$	$(n \geq 0;\ x_0 = 0)$
iv)	$x_{n+1} = ((n+1)/n)x_n + n + 1$	$(n \geq 0;\ x_0 = 5)$
v)	$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$	$(n \geq 1;\ x_0 = 0;\ x_1 = 3)$
vi)	$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$	$(n \geq 1;\ x_0 = 1;\ x_1 = 3)$
vii)	$x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$	$(n \geq 1;\ x_0 = 1;\ x_1 = \xi)$

24. Olkoon x_n lukujen $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ binääriesitysten *viimeisten* nollien lukumäärän keskiarvo. Keksi rekursioyhtälö, jonka jono x toteuttaa. Ratkaise tämä yhtälö, ja laske sen perusteella raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$.

25. Osoita, että kaikille $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix},$$

missä f_i't ovat Fibonaccin lukuja (kts Esimerkki III 3.5). Osoita siten, että

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

26. Henkilö H on saanut lainan, jonka suuruus olkoon K markkaa. Laina on maksettava takaisin yhtäsuurina kuukausittaisina A:n markan talletuksina. Takaisinmaksu käsittää lainan koron ja lainasumman kuoletuksen. Jos korko on r prosenttia, mikä on kuukautta n vastaavan jäljellä olevan lainamäärän L_n suuruus rekursioyhtälönä? Ratkaise tämä yhtälö.

27. Olkoot

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1} \qquad n \geq 1$$

ja olkoot $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.

a) Osoita, että a_n ja b_n toteuttavat seuraavan rekursioyhtälöryhmän:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_{n+1} \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned},$$

missä $n \geq 0$.

b) Muodosta jonojen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ja $b_0, b_1, b_2, \ldots$ tavalliset generoivat funktiot.

c) Esitä a_n ja b_n Fibonaccin lukujen avulla.

28. Määrittelemme *Bernoullin luvut* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ rekursioyhtälön

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \quad n > 1$$

ja ehdon $b_0 = 1$ avulla.

a) Laske b_1, b_2, b_3, b_4 ja b_5.

b) Osoita, että jonon $b_0, b_1, b_2, \ldots$ eksponentiaalisella generoivalla funktiolla on lauseke $x/(e^x - 1)$.

29. Kuinka monella tavalla n-kärkisen konveksin tahokkaan sisusta voidaan jakaa toisiaan leikkaamattomilla lävistäjillä kolmioihin?

(Ohje: Lukumäärät saadaan Catalanin lukujen $\frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1}$ avulla; vrt Esimerkki III 3.4).

30. Ratkaise rekursioyhtälö

$$a_n = 2a_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n \quad (a_0 = 0).$$