Heikki Junnila: Verkot (sivut 7–9)

2. Relaation sisältämät kuvaukset

Tarkastelemme nyt äärellisten joukkojen X ja Y välistä relaatiota $R \subset X \times Y$ ja etsimme ehtoja, joiden vallitessa R sisältää erityyppisiä kuvauksia $X \to Y$.

Jos relaatio $f \subset R$ on kuvaus $X \to Y$, niin jokaisella $x \in X$ on voimassa $f(x) \in R\{x\}$ ja täten $R\{x\} \neq \emptyset$. Jos kääntäen tiedämme, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$, niin on intuitiivisesti selvää, että voimme määritellä kuvauksen $f : X \to Y$ "valitsemalla" jokaisella $x \in X$ kuva-alkioksi $f(x)$ jonkun alkion joukon Y epätyhjästä osajoukosta $R\{x\}$. Tämä intuitiivisesti itsestäänselvä tulos, kyseisenlaisen yht'aikaisen "valinnan" mahdollisuus, vaatii kuitenkin täsmällisen todistuksen, jonka voimme suorittaa luonnollisten lukujen ominaisuuksien avulla.

I 2.1 Lause *(Äärellinen valinta–aksiooma) Olkoon Y äärellinen joukko ja $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$. Tällöin R sisältää kuvauksen $X \to Y$.*

Todistus. Koska Y on äärellinen, on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\phi : [n] \to Y$. Määrittelemme kuvauksen $f : X \to Y$ seuraavasti: merkitsemme $E_x = \phi^{-1}(R\{x\})$ jokaisella $x \in X$ ja merkitsemme k_x:llä epätyhjän joukon E_x pienintä lukua ja $f(x)$:llä joukon $R\{x\}$ alkiota $\phi(k_x)$. Tällöin f on kuvaus $X \to Y$ ja $f \subset R$. □

Jos R sisältää injektion $f : X \to Y$, niin f on bijektio $X \to f(X)$ ja täten jokaisella $A \subset X$ voimassa $|f(A)| = |A|$; koska $f(A) \subset R(A)$, on edelleen voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Osoitamme, että näin saatu välttämätön ehto injektion olemassaololle on myös riittävä.

I 2.2 Lause *(Hallin Lause) Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja ja olkoon $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että jokaisella $A \subset X$ on voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*

Todistus. Todistamme lauseen väitteen induktiolla luvun $|X|$ suhteen. Jos $|X| = 0$, niin tyhjä joukko on injektio $X \to Y$ ja väite on triviaalisti voimassa. Oletamme, että $|X| > 0$ ja väite on todistettu relaatioille $R' \subset X' \times Y'$, missä $|X'| < |X|$.

Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että jokaisella $\emptyset \neq A \subsetneq X$ on voimassa $|R(A)| > |A|$. Olkoon x_0 joku X:n alkio. Koska on voimassa $|R\{x_0\}| \geq |\{x_0\}|$, niin $R\{x_0\} \neq \emptyset$. Olkoon y_0 joku joukon $R\{x_0\}$ alkio eli olkoon voimassa $(x_0, y_0) \in R$. Merkitsemme $X' = X \setminus \{x_0\}$, $Y' = Y \setminus \{y_0\}$ ja $R' = R \cap (X' \times Y')$. Osoitamme, että R' toteuttaa lauseen ehdon. On voimassa $R'(\emptyset) = \emptyset$ ja täten $|R'(\emptyset)| = |\emptyset|$. Jokaisella $\emptyset \neq A \subset X'$ on voimassa $A \neq X$ ja täten $|R(A)| > |A|$; tästä seuraa, koska $R(A) \subset R'(A) \cup \{y_0\}$, että $|R'(A)| \geq |R(A)| - 1 \geq |A|$. Olemme osoittaneet, että R' toteuttaa lauseen ehdon. Koska on voimassa $|X'| < |X|$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että on olemassa sellainen injektio $g : X' \to Y'$, että $g \subset R'$. Merkitsemme $f = g \cup \{(x_0, y_0)\}$ ja panemme merkille, että koska g on injektio ja koska pätee, että $x_0 \notin X'$ ja $y_0 \notin Y'$, niin f on injektio $X' \cup \{x_0\} \to Y' \cup \{y_0\}$ eli $X \to Y$. Lisäksi on voimassa $f \subset R$, koska $g \subset R' \subset R$ ja $(x_0, y_0) \in R$.

Oletamme seuraavaksi, että on olemassa sellainen joukko $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $|R(A)| = |A|$. Merkitsemme

$$S = R \cap (A \times R(A)) \text{ ja } \quad T = R \cap ((X \setminus A) \times (Y \setminus R(A)))\,.$$

Jokaisella $E \subset A$ on voimassa $S(E) = R(E)$ ja täten edelleen $|S(E)| \geq |E|$. Koska $|A| < |X|$, niin relaatio S sisältää induktio–oletuksen nojalla injektion $f : A \to R(A)$. Osoitamme, että relaatio T sisältää injektion $X \setminus A \to Y \setminus R(A)$; koska $A \neq \emptyset$, niin $|X \setminus A| < |X|$ ja induktio–oletuksesta seuraa, että väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että jokaisella $E \subset X \setminus A$ on voimassa $|T(E)| \geq |E|$. Olkoon siis E joukon $X \setminus A$ osajoukko. Lauseen oletuksen nojalla pätee, että $|R(E \cup A)| \geq |E \cup A|$. Lisäksi on voimassa $R(E \cup A) = R(E) \cup R(A)$ ja täten edelleen $|R(E \cup A)| = |R(E) \cup R(A)| = |R(E) \setminus R(A)| + |R(A)|$. Koska $E \subset X \setminus A$, on voimassa $|E \cup A| = |E| + |A|$. Edellä esitetystä seuraa, että on voimassa $|R(E) \setminus R(A)| + |R(A)| \geq |E| + |A|$ ja tästä seuraa yhtälön $|R(A)| = |A|$ nojalla, että $|R(E) \setminus R(A)| \geq |E|$. Koska $E \subset X \setminus A$ ja $T = R \cap ((X \setminus A) \times (Y \setminus R(A)))$, on voimassa yhtälö $T(E) = R(E) \setminus R(A)$ ja täten edelleen epäyhtälö $|T(E)| \geq |E|$. Edelläesitetyn nojalla on olemassa injektio $g : X \setminus A \to Y \setminus R(A)$. Nyt näemme helposti, että $f \cup g$ on injektio $X \to Y$ ja $f \cup g \subset S \cup T \subset R$. □

Tietyissä tilanteissa saamme hyvin havainnollisen tulkinnan sille ehdolle, että relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää injektion $X \to Y$. Jos esimerkiksi X on jokin ihmisjoukko ja Y on joukko työtehtäviä ja jos määrittelemme relaation $R \subset X \times Y$

asettamalla $(x, y) \in R$, mikäli henkilö x voi suorittaa työn y, niin tähän tilanteeseen liittyvällä *työllistämisongelmalla* on ratkaisu jos ja vain jos on olemassa sellainen injektio $f : X \to Y$, että $f \subset R$; kutsumme tällaista injektiota ihmisten X *sovittamiseksi* työpaikkoihin Y. Joissakin muissa tilanteissa annetun relaation sisältämän injektion olemassaolo saa erilaisia tulkintoja; niinpä Hallin lause tunnetaan englanninkielisessä kirjallisuudessa usein nimellä "Hall's marriage theorem".

Hallin lause antaa siis teoreettisen luonnehdinnan sille, että annetulle sovittamisongelmalle löytyy ratkaisu. Lauseen ehdon voimassaolon tarkistaminen ei kuitenkaan usein ole käytännössä mahdollista; lauseessa on myös se käytännön puute, että se takaa vain "sovituksen" olemassaolon, mutta ei anna mitään menetelmää eli algoritmia sovituksen konstruoimiseksi.

Esitämme nyt eräitä seurauslauseita Hallin lauseelle. Ensimmäinen tulos liittyy nk. *erillisten edustajien ongelmaan.* Annetussa ihmisjoukossa A on erilaisia ryhmiä, jotka yhdessä muodostavat joukon A osajoukkoperheen $\mathcal{A}$. Tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista löytää ryhmille $\mathcal{A}$ *erilliset edustajat* eli valita kustakin ryhmästä $B \in \mathcal{A}$ edustaja a_B siten, että $a_B \neq a_C$ aina kun $B \neq C$. Toisin sanoen tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista muodostaa sellainen edustajisto $T \subset A$, että kaikki ryhmät $B \in \mathcal{A}$ ovat edustettuina T:ssä ja kukin T:n jäsen edustaa vain yhtä ryhmää $B \in \mathcal{A}$. Mikäli tässä tilanteessa määrittelemme relaation $R \subset \mathcal{A} \times A$ asettamalla $(B, a) \in R \iff a \in B$, niin erillisten edustajien olemassaolo on yhtäpitävää sen kanssa, että relaatio R sisältää injektion $\mathcal{A} \to A$; koska lisäksi jokaiselle $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ pätee, että $R(\mathcal{A}') = \bigcup \mathcal{A}'$, niin Hallin lause antaa seuraavan tuloksen.

I 2.3 Korollaari *(Radon Lause) Olkoon $\mathcal{A}$ perhe äärellisen joukon A osajoukkoja. Perheen $\mathcal{A}$ joukoilla on erilliset edustajat jos ja vain jos jokaisella $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ on voimassa $|\bigcup \mathcal{A}'| \geq |\mathcal{A}'|$.*

Mainitsimme edellä, että Hallin lauseen ehdon voimassaoloa voi olla käytännössä hankala tarkistaa. Seuraavassa korollaarissa esiintyvä (riittävä, muttei välttämätön) ehto on paljon yksinkertaisempi ja helpommin tarkistettavissa:

I 2.4 Korollaari *Olkoon $R \subset X \times Y$ äärellisten joukkojen X ja Y välinen epätyhjä relaatio. Oletamme, että on olemassa sellainen luonnollinen luku k, että jokaisella $x \in X$ on voimassa $|R\{x\}| \geq k$ ja jokaisella $y \in Y$ on voimassa $|R^{-1}\{y\}| \leq k$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*