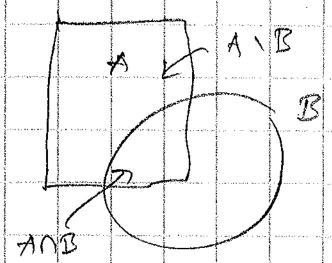
1. Ol. A, B äärellisiä joukkoja.



Väite $|A\setminus B| - |B\setminus A| = |A| - |B|$.

Ratk. $A = (A\setminus B) \cup (A\cap B)$ erillinen yhdiste

$\overset{\text{äärell. joukkoja}}{\Longrightarrow}$ $|A| = |A\setminus B| + |A\cap B|$ $\underset{|A\cap B|<\infty}{\Longrightarrow}$ $|A\setminus B| = |A| - |A\cap B|$

Symmetria $\Rightarrow$ myös $|B\setminus A| = |B| - |\underbrace{A\cap B}_{=B\cap A}|$

Siis
$$|A\setminus B| - |B\setminus A| = |A| - |\cancel{A\cap B}| - \left(|B| - |\cancel{A\cap B}|\right) = |A| - |B|.$$

---

2. Olkoon $R \subset X\times X$ relaatio X:ssä ja
$$R(B) = \{y\in X : bRy \text{ jollakin } b\in B\} \quad \text{kun } B\subset X.$$

(a). **Väite** $R(B)\setminus R(A) \subset R(B\setminus A)$ kaikilla $A, B\subset X$

Tod ol. $y\in R(B)\setminus R(A)$ mielivaltainen alkio

$\left.\begin{array}{l} y\in R(B) \Rightarrow \text{on olemassa } b\in B \text{ s.e. } bRy \text{ voimassa} \\ y\notin R(A) \Rightarrow \text{edellä } b\notin A \end{array}\right\} \Rightarrow b\in B\setminus A$ ja bRy

jolloin $y\in R(B\setminus A)$. **Siis** $R(B)\setminus R(A) \subset R(B\setminus A)$.

(b) esimerkki missä $R(B)\setminus R(A) \subsetneq R(B\setminus A)$ (aito sisältyvyys)

ol. $X = [2] = \{1,2\}$, relaatio $R = \{(1,1),(1,2)\} \subset [2]\times[2]$

$B = \{1,2\} = [2]$, $A = \{1\}$ $\Rightarrow$ $R(B) = \{1\}$, $R(A) = \{1\}$ joten

$R(B)\setminus R(A) = \emptyset$,

$B\setminus A = \{1\}$ $\Rightarrow$ $R(B\setminus A) = \{1\}$.

merkintä: $aRb \Leftrightarrow (a,b)\in R$

---

3. Laske summa- ja erotusperiaatteen avulla kuinka moni luvuista $n\in[180]$ on jaollinen jollakin luvuista 2, 3 tai 5.

Ratk olkoon $A_1 = \{n\in[180] : 2\,|\,n\}$, $A_2 = \{n\in[180] : 3\,|\,n\}$ ja
$A_3 = \{n\in[180] : 5\,|\,n\}$.

Meitä kiinnostaa siis $|A_1\cup A_2\cup A_3|$.

Kombinatoriikka tentti 21.9.2016

2.

Summa- ja erotusperiaate $\Rightarrow$

$$(*) \quad |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\right) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

edellä $|A_1| = \frac{180}{2} = 90, \quad |A_2| = \frac{180}{3} = 60, \quad |A_3| = \frac{180}{5} = 36$

$n \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow 2\cdot 3 \mid n$ eli $6 \mid n \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \frac{180}{6} = 30$

$n \in A_1 \cap A_3 \Leftrightarrow 2\cdot 5 \mid n$ eli $10 \mid n \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = \frac{180}{10} = 18$

$n \in A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow 3\cdot 5 \mid n$ eli $15 \mid n \Rightarrow |A_2 \cap A_3| = \frac{180}{15} = 12$

lopuksi $n \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 5 \mid n$ eli $30 \mid n$ joten $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{180}{30} = 6.$

sijoitus $(*)$:een $\Rightarrow$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 90 + 60 + 36 - (30 + 18 + 12) + 6 = 192 - 60 = \underline{132}$

4.

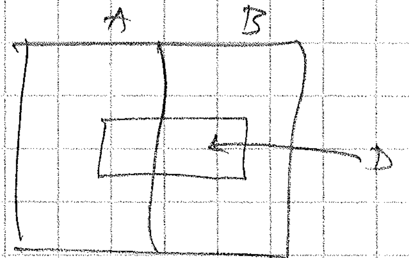
Väite $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{kun } n \geq 1$$

Edellä $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ binomikerroin.

Tod (kombinatorinen argumentti)

olk. $[2n] = \{1,\dots,n\} \cup \{n+1,\dots,2n\} \overset{\text{merk}}{=} A \cup B$

$A \cap B = \emptyset, \quad |A| = n, \quad |B| = n$



$\binom{2n}{n} = \#\{D \subset [2n] : |D| = n\}$

eli n-alkioisten osajoukkojen lukumäärää joukossa $[2n]$.

jos $D \subset [2n]$ ja $|D| = n \overset{\text{ehdot}}{\Rightarrow}$ $|A \cap D| = j$, $|B \cap D| = n - j$

mahdollisia valintoja on (kiinteällä $j = 0,\dots,n$)

$$\underbrace{\binom{n}{j}}_{\substack{j\text{-alkioiset} \\ \text{osaj. A:sta}}} \underbrace{\binom{n}{n-j}}_{\substack{(n-j)\text{-alk.} \\ \text{osaj. B:stä}}} = \binom{n}{j}^2 \text{ kpl, koska}$$

Kombinatoriikka tentti 21.9.2016

3.

$$\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!\,(n-(n-j))!} = \frac{n!}{(n-j)!\,j!} = \binom{n}{j} \quad \text{"symmetria"}$$

Kun $j = 0, \ldots, n$, niin mahdollisia valintoja (erilliset joukot) on

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{kpl.}$$

---

5. Jono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.e.

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

Etsi (a_n):lle yleinen kaava.

Ratk. yritä $a_n = r^n$, $n \geq 0$ $(r \neq 0)$ - sijoitus rekursioyhtälöön $\Rightarrow$

$$0 = r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - r - 1)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - r - 1 = 0 \quad \text{juuret?}$$

$$r^2 - r - 1 = \left(r - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4} = 0 \iff r = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

~~Teoria~~ $\Rightarrow$ yleinen ratkaisu on

$$a_n = A\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + B\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n, \quad n \geq 0$$

missä $A, B \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia.

Alkuehdot $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A + B = 2 & \Rightarrow B = 2 - A \\ A\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) + B\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right) = 1 \end{cases}$$

sij. 2. yhtälöön $\Rightarrow$ $1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (2-A)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$= \cancel{\tfrac{A}{2}} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}A + 1 - \sqrt{5} - \cancel{\tfrac{A}{2}} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}A = \sqrt{5}A + 1 - \sqrt{5}$$

eli $\sqrt{5}A = \sqrt{5}$ ts. $A = 1$, $B = 2 - A = 1$.

Siis $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} + \dfrac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}$, $n \geq 0$

Kommentti: a_n on ns. n:s Lucasin luku (sama yleinen kaava kuin Fibonaccin luvuilla, mutta eri alkuehdot).