REKURSIOYHTÄLÖT

Lukujono $(a_n)_{n\geq 0}$ eli $a_0, a_1, a_2 \ldots$ on rekursiivisesti määritelty jos on olemassa $k>0$ ja funktio f s.e.

$$(+) \quad a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n) \quad \forall n \geq 0$$

"edelliset arvot"

$\boxed{\text{ns. yleinen muoto}}$

(missä f on $(k+1)$:n muuttujan funktio)

Yleensä lisäksi "alkuehto" $a_0 = b_0, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$, missä $b_0, \ldots, b_{k-1}$ annettuja (k kpl)

Sanotaan myös että $(+)$ on differenssiyhtälö (a_n):lle.

Kombi-kurssille lineaarisia vakiokertoimisia rekursioyhtälöitä (RY)

$$(*) \quad a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n \quad \left(\begin{matrix} k>0 \\ \text{annettu} \end{matrix}\right)$$

missä kertoimet $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ ja alkuarvot $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1} \in \mathbb{Z}$ ($\Rightarrow a_n \in \mathbb{Z}$ kaikilla $n \geq 0$)

Siis $(+)$:ssa $f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j$ (lineaarinen kuvaus)

Luku $k>0$ on RY:n $(*)$ kertaluku.

Esim ① $(f_n)_{n\geq 0}$ s.e. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $\boxed{f(u,v) = u+v}$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{kun } n \geq 0.$$

2. kl:n lin RY ($\Rightarrow$ Fibonaccin luvut, esimerkki sivulla 54)

② $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$, $n \geq 0$ 2 kl RY, ei ole lineaarinen

(vastaava $f(u_1, u_2) = u_1 u_2$)

Tavoite ratkaista konkreettiset lineaariset RY:t

pääpaino 2 kl:n lineaariset RY:t

1. kertaluvun RY:t "helppoja"

Esim tarkastellaan

$$(*) \quad \begin{cases} a_{n+1} = c \cdot a_n & , n \geq 0 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$

1 kl. lin (homogeeninen) RY

(v) $a_n = b_0 \cdot c^n \quad \forall n \geq 0.$

syys induktio luvun n suhteen

$$a_0 = b_0 \cdot c^0 = b_0$$

ol. $n \geq 0$ ja $a_n = b_0 \cdot c^n$ voimassa

Tällöin $a_{n+1} \overset{(*)}{=} c \cdot a_n \overset{IO}{=} c \cdot b_0 c^n = b_0 c^{n+1}$

ind PA $\Rightarrow$ (v) voimassa

Kommentti: a_0-homogeeninen 1 kl:n RY vähän vaikeampi

Esim. (Hanoin tornit) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1, & n \geq 0 \\ a_1 = 1. \end{cases}$ HT?

jos $c_2 = 0 \Rightarrow$ 1 kl. RY

2 kl:n lin. RY:t

2 kl:n lineaarinen (vakio kertoiminen homogeeninen) RY on muotoa

$$(*) \qquad a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \quad n \geq 0$$

(ja yleensä alkuehdot $a_0 = d_0$, $a_1 = d_1$), kl = 2 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$

korkeampi kl: vähän monimutkaisempi (esim.)

Tavoite yl. ratkaisumenetelmä (*):lle

siis kaava (suljettu muoto) a_n:lle $\forall n \geq 0$.

tehdään yrite $a_n = r^n$ missä $r \in \mathbb{R}$ (tai myös $r \in \mathbb{C}$) kun tunteaan $r \in \mathbb{R}$ (ei $r \in \mathbb{R}$)

syötetään (*):een $\Rightarrow$ ehto (eli etsitään ratkaisu muodossa $\boxed{a_n = r^n}$ kun $n \geq 0$)

$$r^{n+2} = c_1 r^{n+1} + c_2 r^n \quad \text{eli}$$

$$0 = \underbrace{r^{n+2}}_{r^2 \cdot r^n} - c_1 \underbrace{r^{n+1}}_{r \cdot r^n} - c_2 r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - c_1 r - c_2) = 0$$

jos $r \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ karakteristinen yhtälö (KY)

$r = 0 \Rightarrow$ tutkinta $0^n = 0$ triviaali ratk.

$$(**) \qquad k(r) \equiv r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

2. kl. yhtälö r:lle

KY:n juuret (+ laatu) määräävät (*):n ratkaisut

analogia myös $\leftrightarrow$ DY:t

Mais status 3 eri tapausta mahdollisia

(A) (**) reaalijuuret $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$

B. $(**)$:lla reaalinen $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$

C. $(**)$:lla kompleksinen juuripari $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$ $i^2 = -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

(kun $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ C:ssa konjugaattipari DYM) $\beta \neq 0$. $r_2 = \overline{r_1}$

Tapaus A ol. $(**)$:lla juuret $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$

V. RY:n $(*)$ $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$ $(n \geq 0)$

kaikki ratkaisut ovat

$(+)$ $$a_n = b_1 \cdot r_1^n + b_2 \cdot r_2^n, \quad n \geq 0$$

missä $\boxed{b_1, b_2 \in \mathbb{R}}$ mv. (lukujen r_1^n, r_2^n lin. kombinaatio)

ensin $a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^2$, $n \geq 0$, on ratk. $(*)$:lle $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

sijoita ja laske

$$a_{n+2} - c_1 a_{n+1} - c_2 a_n = b_1 r_1^{n+2} + b_2 r_2^{n+2} - c_1(b_1 r_1^{n+1} + b_2 r_2^{n+1})$$

$$- c_2(b_1 r_1^n + b_2 r_2^n) \underset{b_1, b_2}{\overset{\text{järjestele}}{=}} b_1 \underbrace{(r_1^{n+2} - c_1 r_1^{n+1} - c_2 r_1^n)}_{r_1^n \underbrace{(r_1^2 - c_1 r_1 - c_2)}_{=0}} + b_2 \underbrace{(r_2^{n+2} - c_1 r_2^{n+1} - c_2 r_2^n)}_{r_2^n \underbrace{(r_2^2 - c_1 r_2 - c_2)}_{=0}}$$

$$= 0$$

kaikille $n \geq 0$.

* käänteen: miksi jokainen $(*)$:n ratkaisu (a_n) on muotoa $(+)$?

syy $\boxed{\text{RY:n luonne}}$ rekursioyhtälö

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$$

määrää luvut (a_n) 1-käsitteisesti (= kurssi) kun alkuarvot a_0 ja a_1 tiedossa!

$(\Rightarrow a_2 = c_1 a_1 + c_2 a_0,\ a_3 = c_1 a_2 + c_2 a_1$ jne 1-käsitteisesti$)$

Siis: jos $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ (tai $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$) mv. alkuarvoja, voidaanko löytää $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ s.e.

$(***)$ $$\begin{cases} d_0 = b_1 r_1^0 + b_2 r_2^0 = b_1 + b_2 \\ d_1 = b_1 r_1^1 + b_2 r_2^1 = b_1 r_1 + b_2 r_2 \end{cases} \Bigg| \cdot (-r_1)$$

lin. yht. systeemi b_1 ja b_2:lle LA

54

ts.
$$\begin{cases} -r_1 \cancel{b_1} - r_1 b_2 = -r_1 d_0 \\ \cancel{r_1 b_1} + r_2 b_2 = d_1 \end{cases}$$
$$(r_2 - r_1) b_2 = d_1 - r_1 d_0$$

$r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ ratkaisu $b_2 = \dfrac{d_1 - r_1 d_0}{r_2 - r_1}$ $(\in \mathbb{R})$

1 yht. $\Rightarrow$ $b_1 = d_0 - b_2 = d_0 - \left(\dfrac{d_1 - r_1 d_0}{r_2 - r_1}\right) = \dfrac{r_2 d_0 - \cancel{r_1 d_0} - d_1 + \cancel{r_1 d_0}}{r_2 - r_1} \in \mathbb{R}$ $\square$

Kommentti (A) (ja kohdat (B), (C) alla) toimii myös kun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ja $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ $(\Rightarrow a_n \in \mathbb{R})$.

* Esim (Fibonaccin luvut) ol. $(f_n)_{n \geq 0}$ määritelty ehdoilla

$$(*) \quad \begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ f_0 = 0, \ f_1 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ns. Fibonaccin luvut} \sim 1200}$

Siis
$f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, 8, 13, 21, ... lisää tarinaa netissä

Kys ratkaise suljetussa muodossa $f_n = ?$

Ratk yrite $f_n = r^n \Rightarrow$ ehdosta $(*)$:sta ... $f_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$.

$$r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = r^n(r^2 - r - 1) = 0 \overset{r \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$(\text{KY}) \qquad r^2 - r - 1 = 0$$

juuret? $r^2 - r - 1 = (r - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 1 = (r - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{5}{4} = 0$ eli

$$(r - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4} \iff r = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (huom: $\notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5}$ irrat.!)

Tapaus (A): kaikki ratkaisut muotoa
$$f_n = b_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ mv.}$$

alkuehdot $f_0 = 0, f_1 = 1 \Rightarrow$ yhtälösysteemi

$$(**) \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$ ehdo

1. yht. $\Rightarrow$ $b_2 = -b_1 \overset{\text{jälk}}{\Rightarrow}$ $b_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - b_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = b_1 \underbrace{\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}_{\sqrt{5}} \overset{!}{=} 1$

eli $\sqrt{5}\cdot b_1 = 1$ ts. $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Siis

$$(+) \qquad \underset{\in \mathbb{N}}{f_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\notin \mathbb{Q}}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\notin \mathbb{Q}}\Big)^n \qquad \forall n \geq 0$$

"tyypillinen" "ilmiö"!

Kommentti: (+) on Binet'in kaava Fibonaccilukuille $(f_n)_{n\geq 0}$.

Sovellus Fibonaccille (kombinatoriikka)

Esim: tarkastellaan n-bittijonoja $(b_1,\dots,b_n) \in \underbrace{\{0,1\}^n}_{\equiv X_n}$ ts. $b_j \in \{0,1\}$ $\forall j \in \{1,\dots,n\}$

ol. $n \geq 1$ ja

$$A_n = \{(b_1,\dots,b_n) \in X_n \mid \text{ei ole peräkkäisiä } 0\text{:ia } (b_1,\dots,b_n)\text{:ssä}\}$$

Siis: ei $1,0,0,1,\dots$; $1,0,1,1,0,\dots$ OK

Merkitään $a_n = |A_n|$.

$n=1 \Rightarrow a_1 = 2$ (1), (0)

$n=2 \Rightarrow a_2 = 3$ $\left\{(1,1), (1,0), (0,1)\right\}$ OK ei $(0,0)$

Yleisesti rekursiokaava

$$(*) \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{kun } n \geq 1$$

nimittäin: $A_{n+2} = B_n \cup C_n$ erillinen yhdiste, $B_n = \{(b_1,\dots,b_{n+2}) : b_{n+2} = 1\}$

$C_n = \{(b_1,\dots,b_{n+2}) : b_{n+2} = 0\}$

B_n: $\underbrace{\qquad}_{n+1 \text{ kpl. "vapaa"}} \overset{n+2}{|\,1}$

C_n: $\underbrace{\qquad}_{n \text{ kpl vastaa } a_n} |\,1\,(\cancel{0})\,0$ ei sallittu!

$$\left.\begin{array}{l}|B_n| = a_{n+1}\\ |C_n| = a_n\end{array}\right\} \Rightarrow |A_{n+2}| \overset{\text{erilliset}}{=} |B_n| + |C_n| = a_{n+1} + a_n$$

Siis $a_n = f_{n+2}$ $\forall n \geq 1$. missä $(f_k)_{k\geq 0}$ Fibonacci jono $0,1,1,2,3,\dots$ $a_2 = f_4$, $a_1 = f_3$

Tapaus (B) kar. yhtälöllä $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

on kaksoisjuuri $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$

(V.) kaikki ratkaisut RY:lle

$$(*) \qquad a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$$

ovat

muotoa

(+) $a_n = b_1 r_1^n + b_2 \cdot n r_1^n = (b_1 + n b_2) r_1^n$, $n \ge 0$ missä $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ mv.

Tod (+) ratkaisuja: sijoitetaan

$$a_{n+2} - c_1 a_{n+1} - c_2 a_n = (b_1 + (n+2) b_2) r_1^{n+2} - c_1 (b_1 + (n+1) b_2) r_1^{n+1}$$
$$- c_2 (b_1 + n b_2) r_1^n$$

järjestele

$$= b_1 (r_1^{n+2} - c_1 r_1^{n+1} - c_2 r_1^n) + b_2 ((n+2) r_1^{n+2} - c_1 (n+1) r_1^{n+1} - c_2 n r_1^n)$$

$$= b_1 r_1^n \underbrace{(r_1^2 - c_1 r_1 - c_2)}_{=0} + b_2 r_1^n \big(\underbrace{(n+2) r_1^2 - c_1 (n+1) r_1 - c_2 n}\big) \equiv 0.$$

$$n \underbrace{(r_1^2 - c_1 r_1 - c_2)}_{=0} + \underbrace{2 r_1^2 - c_1 r_1}_{??}$$

$= 0$

kun $c_2 n$ termeissä $n(\ )$

viimeinen termi: verrattu kertoimia

$r = r_1 = r_2$ kaksoisjuuri $\Rightarrow$

$$0 = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2) r + r_1 r_2 = r^2 - c_1 r - c_2$$

$r_1 = r_2 \Rightarrow$ $-c_2 = r_1 r_2 = r_1^2$, $c_1 = r_1 + r_2 = 2 r_1$

yllä $\Rightarrow$ $2 r_1^2 - c_1 r_1 = 2 r_1^2 - (2 r_1) r_1 \equiv 0$

Käänteen: jokainen (*):n ratkaisu on muotoa (+)

kuten tapauksessa (A) riittää osoittaa: jos $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ mv. alkuarvot voidaan aina löytää $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ s.e.

$$(++) \quad \begin{cases} d_0 = b_1 r_1^0 + b_2 \cdot 0 \cdot r_1^0 = b_1 \\ d_1 = b_1 r_1 + b_2 \cdot 1 \cdot r_1 = r_1 b_1 + r_1 b_2 \end{cases}$$

1. yht $\Rightarrow$ $b_1 = d_0 \xRightarrow[\text{2:een}]{\text{sij.}} \boxed{d_1 = r_1 d_0 + r_1 b_2}$ eli

$$r_1 b_2 = d_1 - r_1 d_0 \overset{r_1 \ne 0}{\Longleftrightarrow} b_2 = \frac{d_1 - r_1 d_0}{r_1}$$

(jos $r_1 = 0 \Leftrightarrow r^2 \equiv 0$ triviaali (Ry)). □

Ensin myöh (?) 15/6/2016

Tapaus (C) (mainitse; ei yksityiskohtia) KY:16 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

on kompleksiset konjugaattijuuret $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases} \in \mathbb{C}$ missä $\beta \ne 0$, $i^2 = -1$.