Tällöin jokainen ratkaisu RY:lle

(*) $$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \quad n \geq 0,$$

on muotoa

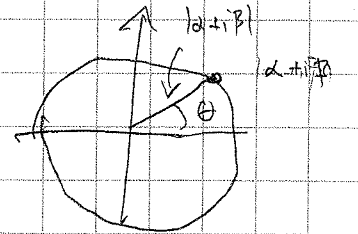
(+) $$a_n = b_1(\alpha+i\beta)^n + b_2(\alpha-i\beta)^n, \quad n \geq 0,$$ missä $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ mv. vakioita

ja vaihtoehtoisesti muotoa

(++) $$a_n = \rho^n\big(d_1\cos(n\theta) + d_2\sin(n\theta)\big), \quad n \geq 0,$$ missä $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mv.

ja $\rho = |\alpha \pm i\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ on luvun $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ moduli

ja $\theta = \arg(\alpha+i\beta)$ on luvun $\alpha+i\beta \in \mathbb{C}$ argumentti (eli $\tan(\theta) = \frac{\beta}{\alpha}$)



(yhteys (+):n ja (++):n välillä:

$$\alpha+i\beta = \rho e^{i\theta} \Rightarrow (\alpha+i\beta)^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Eulerin kaava)

Tapauksen (C) todistus sivuutetaan tässä (samantapainen lasku kuten (A) ja (B), lisäksi

$$r^2 - c_1 r - c_2 = (r-(\alpha+i\beta))(r-(\alpha-i\beta)) = r^2 - (\underbrace{\alpha+i\beta+\alpha-i\beta}_{=2\alpha}) + \underbrace{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}_{\alpha^2-\beta^2} = 0$$

$\Rightarrow$ ehdot $c_1 = 2\alpha$, $c_2 = -(\alpha^2-\beta)^2$).

Esim. Ratkaise RY

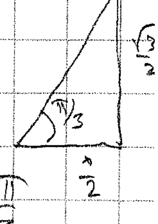
(*) $$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 2, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

Ratk. yritä $a_n = r^n \Rightarrow$

$$0 = r^{n+2} - r^{n+1} + r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - r + 1) \Rightarrow$$

karakt. yhtälö $r^2 - r + 1 = 0$

juuret? $r^2 - r + 1 = (r - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$



erityisesti $\rho = |r| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$ ja

$$\theta = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \text{ eli } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Siis (++) $\Rightarrow$ $$a_n = 1^n \cdot \left(d_1\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + d_2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad n \geq 0$$

alkuehdot $a_0 = 2,\ a_1 = 1 \Rightarrow$ lin. yhtälösysteemi

$$\begin{cases} d_1 \cos(0) + d_2 \sin(0) = 2 \\ d_1 \cos(\frac{\pi}{3}) + d_2 \sin(\frac{\pi}{3}) = 1 \end{cases}$$

koska $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ jäljelle jää

$$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_1 \cdot \frac{1}{2} + d_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \end{cases}$$

eli $\frac{\sqrt{3}}{2} d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 0$. Siis $(\neq)$:n ratkaisu on

$$a_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), \quad n \geq 0.$$ □.

Tarkastellaan vielä yleistä k:nnen kertaluvun lin. RY:tä

$$(*) \qquad a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \dots + c_k a_n, \quad n \geq 0, \qquad \left(\begin{array}{l}\text{missä } c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \\ \text{vakioita}\end{array}\right).$$

missä $k \geq 3$ annettu ($k = 2$ edellä)

Esitämme $(*)$:n ratkaisukaavan seuraavassa erikoistapauksessa.

Lause Oletamme että $(*)$:n karakteristisella yhtälöllä

$$(**) \qquad r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

on k reaalista juurta $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ joille $r_i \neq r_j$ aina kun $i \neq j$.

Tällöin $(*)$:n ratkaisut ovat täsmälleen muotoa

$$(***) \qquad a_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n + \dots + b_k r_k^n,$$ missä lin. kertoimet $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ mielivaltaisia.

Todistus sivuutetaan (katso esim. Ernvall-Hytönen, Lauseet 18 ja 19; niin 2 siinä kombinatoriikka lauseissa).

Tapaukset missä $(**)$:llä moninkertaisia / kompleksisia juuria ovat aikaisempien Ⓐ, Ⓑ ja Ⓒ yleistyksiä ($k = 2$; tarkka muotoilu sivuutetaan tässä)

Esim. Ratkaise RY

$$(\neq) \begin{cases} a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, & n \geq 0 \\ a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3. \end{cases}$$

Ratk. yritä $a_n = r^n$ $(n \geq 0)$ $\overset{3n}{\Rightarrow}$

$$0 = r^{n+3} - 2r^{n+2} - r^{n+1} + 2r^n = \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^3 - 2r^2 - r + 2) \Rightarrow$$

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$ (karakt. yhtälö)

juuret? $r^3 - 2r^2 - r + 2 = r^2(r-2) - (r-2)$

$$= (r^2 - 1)(r-2) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $r^2 - 1 = 0$ tai $r = 2$ ts. $r = \pm 1$ tai $r = 2$.

eri reaalijuuret $\overset{\text{Lause}}{\Longrightarrow}$ kaikki ratk. ovat muotoa

$$a_n = A_0 \cdot \underbrace{1^n}_{=1} + A_1(-1)^n + A_2 \cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

alkuehdot $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ $\Rightarrow$ lin. yhtälöryhmä

$$(H) \quad \begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 0 & \text{"}n=0\text{"} \\ A_0 - A_1 + 2A_2 = 2 & \text{"}n=1\text{"} \\ A_0 + A_1 + 4A_2 = 3 & \text{"}n=2\text{"} \end{cases}$$

ratk. esimerkiksi eliminointimenetelmällä (lin. algebran kurssi)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$ heti $3A_2 = 3 \rightarrow \boxed{A_2 = 1.}$

Silloin 2. ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \\ A_0 - A_1 = 0 \end{cases}$$

(laske yhteen) $2A_0 = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{A_0 = -\frac{1}{2}}$ ja $A_1 = A_0 = -\frac{1}{2}$

Siis $(*)$:n ratkaisu on

$$a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n + 2^n, \quad \text{kun } n \geq 0.$$

(opetusi "sovellusesimerkki" (kombinatorinen tehtävä))

Esim. olkoon $n \in \mathbb{N}^*$ sekä a_n = esitysten lukumäärä

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r \quad \text{missä } n_j \in \{1, 2, 3\} \text{ kaikilla } j = 1, \ldots, r \text{ (ja } r \in \mathbb{N}^*\text{)}$$

Huom. rajoissa $(n_1, \ldots, n_r)$ huomioidaan *järjestys*, ts.

$5 = 3+1+1 = 1+3+1 = 1+1+3$ kolme eri esitystä luvulle $n=5$.

Tehtävä: etsi a_n:lle rekursiivinen yhtälö sekä sen ratkaisu.

Ratk. $n=1 \Rightarrow a_1 = 1$ $\quad 1=1$

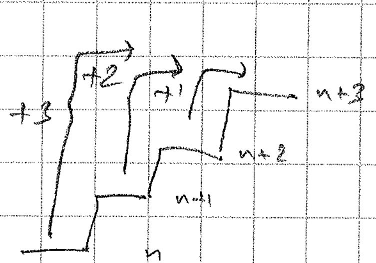
$n=2 \Rightarrow a_2 = 2$ $\quad 2 = 1+1$ ja $2=2$

$n=3 \Rightarrow a_3 = 4$ $\quad 3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$

yleisesti jos $n \geq 1$:

$$a_{n+3} = \underbrace{a_{n+2}} + \underbrace{a_{n+1}} + \underbrace{a_n}$$

$n+3 = (n+2)+1 \qquad n+3 = (n+1)+2 \qquad n+3 = n+3$



(varoitus $n+3 = 1+(n+2) = (n+1)+2$ lasketaan erikseen jo yllä!).

Siis kun todettiin RY:n

$$(*) \begin{cases} a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, & n \geq 1 \\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4 \end{cases}$$

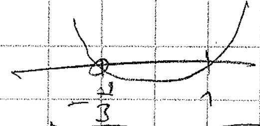
ratkaisu? (3. kertaluvun RY) yrite $a_n = r^n$ $(r \neq 0)$ ja $n \geq 1 \overset{\text{sijoitus}}{\Rightarrow}$

$$0 = r^{n+3} - r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = r^n(r^3 - r^2 - r - 1) \quad \text{ts.}$$

KY $\quad k(r) = r^3 - r^2 - r - 1 = 0.$

juuret? $\quad k(1) = -2 < 0, \quad k(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0$

$$k'(r) = 3r^2 - 2r - 1 = (3r+1)(r-1)$$



analyysi (Bolzanon lause yms) $\Rightarrow$ $\exists$ ainoastaan yksi reaalinen juuri $r_1 \in (1,2)$

(lisäksi $r = -\frac{1}{3}$ lokaali maksimi $k(r)$:lle, ja $k(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 < 0$).

lisäksi konjugaattijuuripari $\begin{cases} r_2 = \alpha + i\beta \\ r_3 = \alpha - i\beta. \end{cases}$

teoria $\Rightarrow$ kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$(+) \qquad a_n = A_0 r_1^n + \rho^n\left(A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)\right), \quad n \geq 1, \quad A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R} \text{ vakioita}$$

missä $\rho = |\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ja $\tan(\theta) = \frac{\alpha}{\beta}$

Tässä esimerkissä juurille $r_1 \in \mathbb{R}$ ja $r_2, r_3 \in \mathbb{C}$ ei ole tarkkoja lausekkeita,

vaan
$$\begin{cases} r_1 \approx 1.8393 \\ r_2 \approx -0.41964 + 0.60629i = \alpha_0 + i\beta_0 \\ r_3 \approx \alpha_0 - i\beta_0 \end{cases}$$

Tässä esimerkissä saadaan (vain) likiarvoja a_n:lle

Kommentti ① edellisessä esimerkissä ainoa tulkinta on

$$a_0 = 0 \quad (\text{ei ole esitystä } 0 = n_1 + \dots + n_k \text{ missä } n_j \in \{1,2,3\})$$

Kuitenkin tässä

$$4 = a_3 \neq a_2 + a_1 + a_0 = 3$$

eli rekursio $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ pätee vain kun $n \geq 1$.

② edellisen esimerkin yleistys. Olk. $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$ annettu ja

a_n = lkm esityksille (järjestys mukaanlukien)

$$n = n_1 + \dots + n_r \quad \text{missä } n_1, \dots, n_r \in \{1, \dots, k\} = [k]$$

kuten edellä tälle saadaan rekursio

$$a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \dots + a_n \quad , \text{ kun } n \geq 1.$$

21/6/2010

③ [illegible] ongelma on luvun $n \in \mathbb{N}^*$ k-partitiot, eli lukumäärä p_n jolle

$$n = n_1 + \dots + n_k \qquad n_j \geq 1 \text{ jokaisella } j \in [k]$$

ja järjestyksellä ei ole väliä. Toisin sanoen,

$$p_n = \left| \{ (n_1, \dots, n_k) : 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \} \right| \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}^*$$

(katso: Junnila sivut 64-66)