Kombinatoriikka: kurssikoekatsaus 22.6.2016

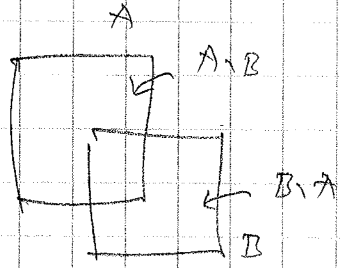
1

(1.) Olkoon A ja B äärellisiä joukkoja.

(V.) $$|A\setminus B| - |B\setminus A| = |A| - |B| \qquad (*)$$

Tod. tapa 1: $|A\setminus B| \le |A| < \infty$, $|B| < \infty$. Siis

$(*) \iff (**)$ $|A\setminus B| + |B| = |B\setminus A| + |A|$



V.P.:

$A\cup B = (A\setminus B) \cup B$ erillinen yhdiste $\Rightarrow$

$|A\cup B| = |A\setminus B| + |B|$

O.P. $B\cup A = (B\setminus A)\cup A$ erillinen yhdiste $\Rightarrow$

$|A\cup B| = |B\cup A| = |B\setminus A| + |A|$

vertaile $\Rightarrow$ $|A\setminus B| + |B| = |B\setminus A| + |A|$ eli $(**)$

tapa 2: $A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$ erillinen yhdiste $\Rightarrow$

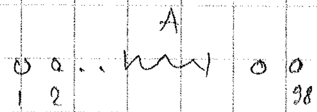
$$\left.\begin{aligned}|A| &= |A\setminus B| + |A\cap B|\\ \text{Samoin (symmetria)}\quad |B| &= |B\setminus A| + |A\cap B|\end{aligned}\right\}\ \text{äärell.} \Rightarrow \text{lukuja}$$

$$|A| - |B| = |A\setminus B| + |A\cap B| - \big(|B\setminus A| + |A\cap B|\big) = |A\setminus B| - |B\setminus A|.$$

(2.) Olk. $A \subset [98]$ sellainen osajoukko että $|A| = 50$.

(V.) on olemassa lukuja $m,n\in A$ s.e.

$$m+n = 99.$$



Tod. huomataan $m+n = 99 \iff m = 99-n$ (jollakin $m,n\in A$)

olkoon $B = \{99-n : n\in A\} \subset [98]$ (koska $1\le n\le 98 \iff 1 \le 99-n \le 98$).

lisäksi $|B| = 50$ ($n \mapsto 99-n$ on bijektio)

Siis: $m = 99-n$ (missä $m,n\in A$) toteutuu $\iff$ $\boxed{A\cap B \neq \emptyset}$

toisaalta (aina)

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| \quad \text{eli}$$

$$|A\cap B| = \underbrace{|A|}_{=50} + \underbrace{|B|}_{=50} - |A\cup B| = 50 + 50 - |A\cup B| \ge 100 - 98 = 2$$

$A\cup B \subset [98] \Rightarrow |A\cup B| \le 98$

Siis erityisesti $A\cap B \neq \emptyset$ eli on olemassa $m,n\in A$ joille

$$m = 99-n \quad \text{eli} \quad m+n = 99.$$

□

3. Vr. binomikerroin $\binom{2n}{n}$ on parillinen luku jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$

(t.s. $\binom{2n}{n} = 2 \cdot k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$).

Ratk. Pascalin kaava

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} =$$

$$\overset{\text{määr.}}{=} \frac{(2n-1)!}{n!\,(\underbrace{2n-1-n}_{=n-1})!} + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(\underbrace{2n-1-(n-1)}_{=n})!} = \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$$

$$= 2 \cdot \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$$ muotoa $2 \cdot k$ parillinen luku

(Huom: $\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \binom{2n-1}{n} \in \mathbb{N}^*$ on posit. kokonaisluku).

---

4. Todista induktiolla että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee summakaava

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} (k!) \cdot k = (n+1)! - 1$$

Huom vasen puoli on $\underbrace{(0!) \cdot 0}_{=0} + (1!)\,1 + (2!)\,2 + \dots + (n!)\,n$.

Tod. $n = 0$ VP on $(0!) \cdot 0 = 0$ (ainoastaan 1. termi summassa)

OP on $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$ OK

Ol. $n > 0$ ja oletetaan (induktio-oletus) että $(*)$ voimassa $(n-1)$:llä t.s.

$$(+) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (k!)\,k = n! - 1.$$

Tällöin

$$\sum_{k=0}^{n} (k!)\,k = \underbrace{(0!)\,0 + (1!)\,1 + \dots + (n-1)!\,(n-1)}_{= n! - 1 \quad (IO)} + (n!)\,n$$

$$\overset{IO}{=} n! - 1 + (n!)\,n = \underbrace{(n!)\,(n+1)}_{=(n+1)!} - 1 = (n+1)! - 1$$

Siis induktiop. $\Rightarrow$ $(*)$ voimassa kaikille $n \in \mathbb{N}$.

5.

Joukko $A \subset \mathbb{N}$ on <u>harva</u> jos A <u>ei</u> sisällä kahta peräkkäistä lukua ts. jos $k \in A \Rightarrow k+1 \notin A$. (eli $\{k, k+1\} \not\subset A$ millään $k \in \mathbb{N}$).

Ol. $\mathcal{A}_n = \{A \subset [n] : A \text{ harva joukko}\}$, sekä

$h_n = |\mathcal{A}_n|$ kun $n \in \mathbb{N}$.

Etsi rekursiivinen yhtälö jonolle $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sekä määrä h_n kun $n \in \mathbb{N}$.

<u>Ratk.</u>

$h_0 = 1$ koska $\emptyset \subset [0] = \emptyset$

$h_1 = 2$ koska $\emptyset, \{1\}$ harvoja $[1]$:ssa

(lisäksi $h_2 = 3$, koska $\emptyset, \{1\}, \{2\} \subset [2]$ harvoja, $[2] = \{1,2\}$ ei ole harva)

rekursio? Ol. $A \in \mathcal{A}_{n+1}$ eli $A \subset [n+1]$ harva

$$\overbrace{0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; \underset{n-1}{0} \;\; \underset{n}{0}}^{A \subset [n] \text{ harva}} \;\; \underset{n+1}{\times}$$

Ol. $\mathcal{B}_{n+1} = \{A \in \mathcal{A}_{n+1} \mid n+1 \in A\}$, $\mathcal{C}_{n+1} = \{A \in \mathcal{A}_{n+1} \mid n+1 \notin A\}$ erilliset ja $\boxed{\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}_{n+1} \cup \mathcal{C}_{n+1}}$

Jos! $A \in \mathcal{C}_{n+1} \Rightarrow n+1 \notin A \Rightarrow A \subset [n]$ ja A harva eli $A \in \mathcal{A}_n$

siis $|\mathcal{C}_{n+1}| = h_n$

$$\overbrace{0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; \underset{n-1}{0}}^{\text{harva osaj. tässä}} \;\; \underset{n}{\times} \;\; \underset{n+1}{\overset{\in A}{0}}$$

Jos $A \in \mathcal{B}_{n+1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n+1 \in A \\ A \text{ harva} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n \notin A$

$\Rightarrow A \cap [n-1]$ on harva $[n-1]$:ssä (ei lisäehtoja) $\Rightarrow$

$|\mathcal{B}_{n+1}| = h_{n-1}$

erillinen yhdiste $\Rightarrow h_{n+1} = |\mathcal{A}_{n+1}| = |\mathcal{B}_{n+1}| + |\mathcal{C}_{n+1}| = h_{n-1} + h_n$, $n \geq 1$

eli <u>Fibonacci</u> rekursio $\boxed{h_{n+1} = h_n + h_{n-1}}$, $n \geq 1$.

Fibonaccin luvut $(f_n)_{n \geq 0}$: $\overset{f_0}{0}, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

lukujono $(h_n)_{n \geq 0}$ taas $\underset{h_0}{1}, 2, 3, \ldots$

siis $h_n = f_{n+2}$ kun $n \geq 0$

[Luennon esimerkki / rekursioyhtälöiden ratkaisumenetelmä: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n \geq 0$

$\Rightarrow h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$ kun $n \geq 0$.]