Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Harjoitus 5 (21.6-23.6.2016; viimeinen harjoitus)

Muistutuksia: $[n] = \{1, \ldots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Joukon $[n]$ *epäjärjestys* on permutaatio $f : [n] \to [n]$ jolle $f(j) \neq j$ kaikilla $j \in [n]$.

1. Olkoon a_n sellaisten n-jonojen $(r_1, \ldots, r_n)$ lukumäärä, että $r_j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ kun $j \in [n]$ ja jonossa on parillinen määrä nollia. Näytä, että jono (a_n) toteuttaa rekursiivisen relaation

$$a_{n+1} = 8a_n + 10^n, \quad n \geq 1, \quad a_1 = 9.$$

Ratkaisu. Todistetaan väite induktion avulla.

Alkuaskel: Olk. $n = 1$. Nyt jonossa on vain yksi jäsen. Jotta nollia olisi parillinen määrä, tulee niiden lukumäärä olla siis 0. Jono voidaan siis muodostaa valitsemalla mikä tahansa alkioista $r_1 \in \{1, \ldots 9\}$, joten $a_1 = 9$.

Induktio-oletus: Oletetaan, että $n = k \geq 1$. Sellaisia k-jonoja, joissa on parillinen määrä nollia, on a_k kappaletta. Lisäksi

$$a_k = 8a_{k-1} + 10^{k-1}.$$

Tutkitaan nyt tapausta, missä $n = k+1$. Halutaan osoittaa, että ehdon toteuttavien jonojen $(r_1, \ldots, r_{k+1})$ lukumäärälle pätee

$$a_{k+1} = 8a_k + 10^k.$$

Tämän jonon viimeiselle alkiolle pätee joko $r_{k+1} = 0$ tai $r_{k+1} \in [9]$.

Jos $r_{k+1} = 0$, niin jonossa $(r_1, \ldots r_k)$ täytyy olla pariton määrä nollia. Näiden lukumäärä on erotus kaikkien jonojen lukumäärän ja parillisen määrän nollia sisältäväien jonojen lukumäärän kesken, eli

$$b_{k+1} = 10^k - a_k.$$

Jos taas $r_{k+1} \in [9]$, niin jonossa $(r_1, \ldots r_k)$ tulee olla parillinen määrä nollia. Jono $(r_1, \ldots, r_{k+1})$ voidaan muodostaa valitsemalla alkion r_{k+1} arvoksi mikä tahansa arvo joukosta $[9]$. Ehdon toteuttavia jonoja on

$$c_{k+1} = 9 \cdot a_k.$$

Yhteensä jonoja on siis

$$a_{k+1} = b_{k+1} + c_{k+1} = 10^k - a_k + 9a_k = 10^k + 8a_k.$$

2. Ratkaise yleinen 1. kertaluvun epähomogeeninen rekursioyhtälö

$$a_{n+1} = ba_n + c, \quad n \geq 0, \quad a_0 = d$$

induktiolla luvun n suhteen.

Ratkaisu. Olkoon rekursioyhtälö määritelty kuten tehtävässä. Tarkastellaan muutamia ensimmäisiä lukuja, jotta saadaan käsitys yhtälöstä joka meidän kuuluu osoittaa induktiolla:

$$a_1 = bd + c, \qquad a_2 = b(bd+c) + c = b^2 d + c(b+1)$$

$$a_3 = b(b^2 d + c(b+1)) + c = b^3 d + c\sum_{j=0}^{2} b^j.$$

Voidaan siis päätellä että yhtälö voisi mahdollisesti olla muotoa

$$a_n = db^n + c\sum_{j=0}^{n-1} b^j.$$

Osoitetaan että mainittu yhtälö pätee induktiolla. Alkuaskel on jo tehty, joten oletetaan että väite pätee jollakin $n > 0$. Osoitetaan että yhtälö tällöin pätee myös luvulla $n+1$:

$$a_{n+1} = ba_n + c = b(db^n + c\sum_{j=0}^{n-1} b^j) + c = db^{n+1} + c\sum_{j=0}^{n-1} b^{j+1} + c$$

$$= db^{n+1} + c\sum_{j=1}^{n} b^j + c = db^{n+1} + c\sum_{j=0}^{n} b^j.$$

Yhtälö pätee luvulle $n+1$ ja näin ollen yhtälö on tehtävässä annetun rekursioyhtälön ratkaisu.

3. *Fibonaccin luvut* (f_n) toteuttavat rekursioyhtälön

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 0, \quad f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Näytä induktiolla luvun n suhteen että

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

Ratkaisu. *Alkuaskel*: Ol. $n = 1$. Nyt

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 0 - 1^2 = (-1)^1.$$

Induktio-oletus: Oletetaan, että $n = k \geq 1$ ja

$$f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k.$$

Induktio-oletus voidaan esittää myös muodossa

$$f_k^2 = f_{k+1} \cdot f_{k-1} - (-1)^k.$$

Halutaan nyt osoittaa, että jos $n = k + 1$, niin

$$f_{k+2} \cdot f_k - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}.$$

Fibonaccin lukujen määritelmän mukaan $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, joten

$$\begin{aligned}
f_{k+2} \cdot f_k - f_{k+1}^2 &= (f_{k+1} + f_k) \cdot f_k - f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot f_k + f_k^2 - f_{k+1}^2 \\
&\overset{IO}{=} f_{k+1}f_k - f_{k+1}^2 + f_{k+1} \cdot f_{k-1} - (-1)^k \\
&= f_{k+1}(f_k + f_{k-1}) - f_{k+1}^2 - (-1)^k = f_{k+1} \cdot f_{k+1} - f_{k+1}^2 - (-1)^k \\
&= -1 \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

4. Ratkaise lineaarinen rekursioyhtälö

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 6a_n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan tehtävässä mainittu rekursioyhtälö käyttämällä yritettä $a_n = r^n, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$. Nyt yrite antaa yhtälölle ratkaisun

$$r^{n+2} = 5r^{n+1} + 6r^n \Leftrightarrow r^n(r^2 - 5r - 6) = 0,$$

ja koska oletuksena oli että $r \neq 0$, niin pätee että

$$r^2 - 5r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}.$$

Tästä saadaan että mahdolliset ratkaisut ovat $r_1 = 6$ tai $r_2 = -1$. Tästä seuraa että yhtälön ratkaisu on muotoa

$$a_n = b_1 6^n + b_2(-1)^n, \qquad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Ratkaistaan vielä luvut b_1 ja b_2 sijoittamalla alkuluvut $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$ yhtälöön. Saadaan

$$\begin{cases} a_0 = b_1 + b_2 = 0, \\ a_1 = 6b_1 - b_2 = 1, \end{cases}$$

josta saadaan ratkaisut $b_1 = \frac{1}{7}$ ja $b_2 = -\frac{1}{7}$. Näin ollen tehtävässä annetun rekursioyhtälön ratkaisu on

$$a_n = \frac{6^n - (-1)^n}{7}.$$

5. Ratkaise lineaarinen rekursioyhtälö

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, \quad n \geq 0,$$

kun $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$.

Ratkaisu. Ratkaistaan tehtävässä mainittu rekursioyhtälö käyttämällä yritettä $a_n = r^n, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$. Rekursioyhtälö saadaan muotoon

$$r^{n+3} - 2r^{n+2} - r^{n+1} + 2r^n = 0 \Leftrightarrow r^n(r^3 - 2r^2 - r + 2) = 0.$$

Koska $r \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} & r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & r^2(r-2) - r + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & r^2(r-2) - (r+2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (r^2 - 1)(r-2) = 0 \end{aligned}$$

Yhtälölle saadaan siis ratkaisut $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$ ja $\rho_3 = 1$. Ernvall-Hytösen monisteen lauseen 18 mukaan rekursioyhtälön yleinen ratkaisu on nyt muotoa

$$a_n = b_1 \cdot \rho_1^n + b_2 \cdot \rho_2^n + b_3 \cdot \rho_3^n = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot (-1)^n + b_3$$

Vakiokertoimet b_1, b_2, b_3 saadaan ratkaistua alkuarvojen avulla.

$$\begin{cases} a_0 = b_1 \cdot 2^0 + b_2 \cdot (-1)^0 + b_3 = 0 \\ a_1 = b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot (-1)^1 + b_3 = 1 \\ a_2 = b_1 \cdot 2^2 + b_2 \cdot (-1)^2 + b_3 = 2 \end{cases}$$

Tämä yhtälöryhmä voidaan ratkaista esimerkiksi matriisimenetelmän (eli eliminointimenetelmän) avulla seuraavasti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_2-2R_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{R_3-4R_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2-R_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}\cdot R_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \overset{R_1-R_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Nyt siis

$$\begin{cases} b_1 = \frac{2}{3} \\ 2b_3 = -1 \\ b_2 + b_3 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{2}{3} \\ b_3 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -\frac{2}{3} - b_3 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Rekursioyhtälön ratkaisu on siis

$$a_n = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot (-1)^n + b_3 = \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{6} \cdot (-1)^n - \frac{1}{2}.$$

6.* Olkoon e_n joukon $[n]$ epäjärjestysten lukumäärä, kun $n \in \mathbb{N}^*$. Näytä, että palautuskaava

$$e_{n+1} = n(e_n + e_{n-1})$$

on voimassa kun $n \geq 1$.

Ohje: olkoon $f : [n+1] \to [n+1]$ mielivaltainen epäjärjestys. Tällöin $k = f(n+1) \in [n]$. Tutki tapaukset $f(k) = n+1$ tai $f(k) \in [n]$ erikseen.

Ratkaisu. Osoitetaan palautuskaava ohjeen mukaisesti. Olkoon $f : [n+1] \to [n+1]$ mielivaltainen epäjärjestys. Tällöin pätee että $f(n+1) = k \in [n]$, sillä $n+1$ ei voi kuvautua itselleen. Todetaan siis että $f(n+1)$ voi saada n eri arvoa. Jäljelle jää siis n alkiota jotka kuvautuvat epäjärjestyksen f mukaisesti. Tarkastellaan erikseen kahta tapausta ohjeen mukaisesti:

Tapaus 1: $f(k) = n+1$

Tässä tapauksessa siis $n+1$ ja k kuvautuvat toisilleen, jolloin jäljelle jää tarkasteltavaksi $n-1$ alkiota. Koska f on epäjärjestys, niin tästä seuraa että jäljelle jäävät alkiot kuvautuvat epäjärjestyksen mukaisesti, jolloin mahdollisia epäjärjestyksiä on e_{n-1} kappaletta.

Tapaus 2: $f(k) \in [n]$

Tarkastellaan epäjärjestystä f joukossa jossa $f(n+1) = k \in [n]$ on kiinnitetty, eli $f : [n] \to [n+1] \setminus \{k\}$. Koska $f(k) \neq n+1$, niin voidaan todeta että epäjärjestysten määrä tässä tapauksessa on e_n, sillä kyseinen epäjärjestys on isomorfinen epäjärjestyksen $g : [n] \to [n]$ kanssa.

Todetaan että edellä mainitut tapaukset ovat erillisiä, joten kun $f(n+1) = k \in [n]$ on kiinnitetty, niin epäjärjestysten määrä on $e_n + e_{n-1}$. Koska k voidaan kiinnittää n eri tavalla, niin tästä seuraa lopuksi että

$$e_{n+1} = n(e_n + e_{n-1}).$$

Kombinatoriikan kurssikoe järjestetään *keskiviikkona 29.6.* klo 12.15–14.45 salissa B123. Kombinatoriikan kurssin voi myös tenttiä kesätentissä torstaina 11.8. klo 10–14, sekä sykyn yleistenteissä 21.9. ja 14.12. Yleistentteihin tuleei ilmoittautua weboodissa.

Tentissä saa olla mukana kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu, muttei laskinta.