Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka kesä 2016
Harjoitus 4 ratkaisuehdotukset

Muistutuksia: $[n] = \{1, \ldots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Jos $|X| = n$, niin joukon X k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. (a) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että binomikaava

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

on voimassa. *Ohje:* induktio luvun n suhteen ja Pascalin kaava.

(b) Laske termin x^3 kerroin polynomissa

$$(3+4x)^6.$$

Ratkaisu. (a) Seurataan ohjetta ja osoitetaan väite induktion avulla. Olkoon oletukset kuten tehtävässä on annettu.
Palautetaan ensinnäkin mieleen Pascalin yhtälö, kun $n, j \in \mathbb{N}$ ja $0 < j < n$:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}. \tag{1}$$

Todetaan seuraavaksi että väite pätee kun valitaan $n = 1$, sillä

$$x + y = x^1y^0 + x^0y^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} x^j y^{1-j}.$$

Oletetaan seuraavaksi että väite pätee luvulle $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Osoitetaan että tällöin väite pätee myös luvulle $k + 1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k \overset{IO}{=} (x+y) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{j+1} y^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k+1-j} \\
&= x^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^{j+1} y^{k-j} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k+1-j} + y^{k+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} x^i y^{k+1-i} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k+1-j} + y^{k+1} \\
&= x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right] x^j y^{k+1-j} + y^{k+1} \\
&\overset{1}{=} x^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{j} x^j y^{k+1-j} + y^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j y^{k+1-j}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen voidaan todeta että väite tosiaan pätee.

(b) Etsitään kyseinen kerroin termille x^3. Käytetään juuri osoittamaamme yhtälöä hyväksi ja kirjoitetaan annettu polynomi seuraavasti:

$$(3+4x)^6 = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} 3^j (4x)^{6-j}.$$

Tästä huomataan että summan termi $j = 3$ antaa meille kyseisen kertoimen. Joten haluttu kerroin saadaan polynomista

$$\binom{6}{3} 3^3 (4x)^3 = 5 \cdot 4^4 \cdot 3^3 x^3 = 34560x^3.$$

2. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ainakin kahdesti?

Ratkaisu. Olkoon $X = \{0, 1, \ldots, 9\}^5$, jolloin mahdollisia puhelinnumeroita on yhteensä

$$|X| = |\{0, 1, \ldots, 9\}|^5 = 10^5.$$

Koska halutaan löytää kaikki puhelinnumerot joissa joku luku esiintyy vähintään kahdesti, niin kannattaa tarkastella kyseisen joukon komplementtia, joka on helpompi laskea. Olkoon siis

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{puhelinnumerot joissa joku luku esiintyy vähintään kahdesti}\} \text{ ja} \\
A^c &= \{\text{puhelinnumerot joissa jokainen luku on eri}\}.
\end{aligned}
$$

Nyt voidaan laskea komplementin alkioiden määrä, sillä nyt valitaan viisi numeroa kymmenestä mahdollisesta (tässä tapauksessa järjestyksellä on väliä), joten
$$|A^c| = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$
Nyt voidaan laskea joukon A alkiot, sillä
$$|A| = |(A^c)^c| = |X \setminus A^c| = |X| - |A^c| = 10^5 - 30240 = 69760$$
Eli kyseisiä puhelinnumeroita on 69760 kpl.

3. (a) Johda yhtälö
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$
induktiolla. Voitko antaa yhtälölle myös kombinatorisen tulkinnan?

(b) Määritä summan $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)$ arvo.

Ratkaisu. (a) Johdetaan mainittu yhtälö tehtävänannon mukaisesti induktiolla. Olkoon siis $k, n \in \mathbb{N}$ siten että $0 \leq k \leq n$.

Todetaan ensin että kun $n = 1$, niin mahdollisuudet k:lle ovat 0 ja 1. Lasketaan
$$\binom{2}{1} = 2 = 1 + 1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{0} \text{ ja } \binom{2}{2} = 1 = \binom{1}{1},$$
joten väite pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan seuraavaksi että väite pätee luvulla $n-1 > 1$ ja osoitetaan että tällöin väite pätee myös luvulle n. Käytetään yhtälöä (1), josta seuraa
$$\binom{n+1}{k+1} \overset{1}{=} \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \overset{IO}{=} \binom{n}{k} + \left[\binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}\right],$$
joten yhtälö pätee myös luvulle n.

(b) Huomataan aluksi että tehtävässä annettu summa voidaan kirjoittaa muodossa
$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \sum_{j=1}^{n} 2! \frac{(j+1)!}{2!(j+1-2)!} = \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot \binom{j+1}{2},$$

joka (a)-kohdan nojalla voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot \binom{j+1}{2} = 2 \cdot \binom{n+2}{3}.$$

4. Kuinka moni luvuista $n \in [140]$ on jaollinen ainakin jollakin luvuista $2, 5, 7$?

Ratkaisu. Aloitetaan luokittelemalla luvut $n \in [140]$. Olkoon

$$\begin{aligned} A_2 &= \{n \in [140] : 2|n\}, & |A_2| &= 70, \\ A_5 &= \{n \in [140] : 5|n\}, & |A_5| &= 28, \\ A_7 &= \{n \in [140] : 7|n\}, & |A_7| &= 20. \end{aligned}$$

Huomataan lisäksi että näiden joukkojen leikkaukset voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} A_2 \cap A_5 &= \{n \in [140] : 2|n \text{ ja } 5|n\} = \{n \in [140] : 10|n\}, & |A_2 \cap A_5| &= 14, \\ A_2 \cap A_7 &= \{n \in [140] : 2|n \text{ ja } 7|n\} = \{n \in [140] : 14|n\}, & |A_2 \cap A_7| &= 10, \\ A_5 \cap A_7 &= \{n \in [140] : 5|n \text{ ja } 7|n\} = \{n \in [140] : 35|n\}, & |A_5 \cap A_7| &= 4, \end{aligned}$$

$$A_2 \cap A_5 \cap A_7 = \{n \in [140] : 70|n\}, \qquad |A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 2$$

Nyt voidaan käyttää näitä joukkoja haluamamme joukon alkioiden lukumäärän laskemiseen. Halutaan siis laskea kaikki alkiot jotka ovat jaollisia joko luvulla $2, 5$ tai 7. Summa- ja erotusperiaatteen nojalla voidaan nyt laskea

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| &+ |A_5| + |A_7| \\ &- |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 70 + 28 + 20 - 14 - 10 - 4 + 2 = 92, \end{aligned}$$

jolloin voidaan todeta että kyseisiä lukuja on 92 kpl.

5. Laske summa ja erotusperiaatteen avulla lukua 250 pienempien alkulukujen lukumäärä. (Huom.: 1 ei ole alkuluku.] *Ohje:* laske niiden luonnollisten lukujen $1 < n \leq 250$ lukumäärä, jotka eivät ole alkulukuja. Huomaa, että tällaisella luvulla n on alkulukutekijä p, jolle $p \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{250} < 16$.

Ratkaisu. Lasketaan ensin summa- ja erotusperiaatteen avulla niiden lukujen $n \in [250]$ määrä jotka eivät ole alkulukuja, ts. alkulukujen komplementti joukossa [250]. Tämän jälkeen voidaan laskea jäljelle jäävien lukujen, eli alkulukujen määrä.

Muistellaan että jokainen luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ voidaan kirjoittaa muodossa $n = 2^r \cdot k$, jossa $r \in \mathbb{N}$ ja k on pariton luku. Tehtävän ohjeen huomautuksen mukaisesti löydetään siis tosiaan alkulukutekijä p jokaiselle n joka ei ole alkuluku, siten että $p \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{250} < 16$. Näin ollen meidän riittää tarkastella niiden lukujen määrä jotka ovat jaollisia joko luvulla $2, 3, 5, 7, 11$ tai 13.
Tehdään samalla tavalla kuten tehtävässä 4:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{n \in [250] : 2|n, n \neq 2\}, & |A_1| &= 124, \\
A_2 &= \{n \in [250] : 3|n, n \neq 3\}, & |A_2| &= 82, \\
A_3 &= \{n \in [250] : 5|n, n \neq 5\}, & |A_3| &= 49, \\
A_4 &= \{n \in [250] : 7|n, n \neq 7\}, & |A_4| &= 34, \\
A_5 &= \{n \in [250] : 11|n, n \neq 11\}, & |A_5| &= 21, \\
A_6 &= \{n \in [250] : 13|n, n \neq 13\}, & |A_6| &= 18.
\end{aligned}$$

Myös näiden joukkojen leikkaukset lasketaan kuten tehtävässä 4 (joukot jotka ovat tyhjiä jätetään tässä mainitsematta):

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cap A_2| = 41, & &|A_1 \cap A_3| = 25, & &|A_1 \cap A_4| = 17, \\
&|A_1 \cap A_5| = 11, & &|A_1 \cap A_6| = 9, & &|A_2 \cap A_3| = 16, \\
&|A_2 \cap A_4| = 11, & &|A_2 \cap A_5| = 7, & &|A_2 \cap A_6| = 6, \\
&|A_3 \cap A_4| = 7, & &|A_3 \cap A_5| = 4, & &|A_3 \cap A_6| = 3, \\
&|A_4 \cap A_5| = 3, & &|A_4 \cap A_6| = 2, & &|A_5 \cap A_6| = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8, & &|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 5, \\
&|A_1 \cap A_2 \cap A_5| = 3, & &|A_1 \cap A_2 \cap A_6| = 3, \\
&|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 3, & &|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 2, \\
&|A_1 \cap A_3 \cap A_6| = 1, & &|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cap A_4 \cap A_6| &= 1, & |A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 2,\\
|A_2 \cap A_3 \cap A_5| &= 1, & |A_2 \cap A_3 \cap A_6| &= 1,\\
|A_2 \cap A_4 \cap A_5| &= 1, & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 1.
\end{aligned}
$$

Huomataan että muut neljän joukon, sekä viiden ja kuuden joukon leikkaukset ovat tyhjiä, sillä kyseisten joukkojen alkulukujen tulot ovat suurempia kuin 250.
Seuraavaksi käytetään summa- ja erotusperiaatetta käyttäen edellä mainittuja joukkoja, jolloin saadaan tulokseksi:

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{6} |A_i| - \sum_{1\le j<k\le 6} |A_j \cap A_k|\\
&+ \sum_{1\le j<k<m\le 6} |A_j \cap A_k \cap A_m| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\\
&= 328 - 163 + 32 - 1 = 196.
\end{aligned}
$$

Pidetään mielessä että luku 1 ei ole alkuluku, vaikkei se kuulunutkaan ylläoleviin joukkoihin, joten saadaan että alkulukujen määrä on $249 - 196 = 53$.

6*. Näytä, että

$$
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}
$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}^*$. *Ohje:* symmetrian perusteella $\binom{n}{j}^2 = \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j}$ kaikilla $j = 0, \dots, n$. Laskettaessa n-alkioisten osajoukkojen lukumäärää joukossa $[2n]$, mieti mikä on vasemmanpuoleisen summalausekkeen tulkinta erillisen yhdisteen $[2n] = A \cup B$ suhteen, missä $A = [n]$ ja $B = \{n+1, \dots, 2n\}$.

Ratkaisu. Voidaan ensinnäkin todeta että

$$
\binom{n}{j}^2 = \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}, \text{ koska } \binom{n}{j} = \binom{n}{n-j} \text{ kun } n, j \in \mathbb{N}^* \text{ ja } 0 \le j \le n.
$$

Tutkitaan seuraavaksi n-alkioisten osajoukkojen lukumäärää joukossa $[2n]$. Jaetaan ensin ohjeen mukaisesti joukko $[2n]$ kahteen erilliseen osaan $A = [n]$

ja $B = n+1, \dots, 2n$. Luokitellaan nyt n-alkioiset osajoukot seuraavasti:

$$\mathcal{A}_j = \{C \in \mathcal{P}_n([2n]) : |C \cap A| = j\}.$$

Nyt $\mathcal{A}_j$ sisältää kaikki ne osajoukot joilla j alkioista ovat joukosta A. Tästä seuraa suoraan että $n-j$ alkioista ovat joukosta B. Nyt voidaan todeta että osajoukkojen A-osajoukko voidaan valita $\binom{n}{j}$ eri tavalla, kun taas B-osajoukko voidaan valita $\binom{n}{n-j}$ eri tavalla. Tästä seuraa että

$$|\mathcal{A}_j| = \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}.$$

Lisäksi pätee että $\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$ kaikilla $j \neq i$, sillä osajoukkojen A-osajoukon alkioiden lukumäärä on eri näissä perheissä. Koska on oletettu että $0 \leq j \leq n$, niin voidaan todeta että

$$\binom{2n}{n} = \left|\bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{A}_j\right| = \sum_{j=0}^{n} |\mathcal{A}_j| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2,$$

mikä osoittaa väitteen.

Muistutus: jokaisesta laskuharjoituksesta saa lisäpisteitä seuraavasti: 4-7 ruksia = +1 p., 2-3 ruksia = +1/2 p. Tähtitehtävät ovat vaativampia ja niiden ratkaisusta saa merkitä 2 ruksia.