Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Harjoitus 4 (14.6-16.6.2016)

Muistutuksia: $[n] = \{1, \ldots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Jos $|X| = n$, niin joukon X k-alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. (a) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että binomikaava

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

on voimassa. *Ohje:* induktio luvun n suhteen ja Pascalin kaava.

(b) Laske termin x^3 kerroin polynomissa

$$(3+4x)^6.$$

2. Kuinka monessa viisinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ainakin kahdesti?

3. (a) Johda yhtälö

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$

induktiolla. Voitko antaa yhtälölle myös kombinatorisen tulkinnan?

(b) Määritä summan $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)$ arvo.

4. Kuinka moni luvuista $n \in [140]$ on jaollinen ainakin jollakin luvuista $2, 5, 7$?

5. Laske summa ja erotusperiaatteen avaulla lukua 250 pienempien alkulukujen lukumäärä. (Huom.: 1 ei ole alkuluku.] *Ohje:* laske niiden luonnollisten lukujen $1 < n \leq 250$ lukumäärä, jotka eivät ole alkulukuja. Huomaa, että tällaisella luvulla n on alkulukutekijä p, jolle $p \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{250} < 16$.

6*. Näytä, että

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}^*$. *Ohje:* symmetrian perusteella $\binom{n}{j}^2 = \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j}$ kaikilla $j = 0, \ldots, n$. Laskettaessa n-alkioisten osajoukkojen lukumäärää joukossa $[2n]$, mieti mikä on vasemmanpuoleisen summalausekkeen tulkinta erillisen yhdisteen $[2n] = A \cup B$ suhteen, missä $A = [n]$ ja $B = \{n+1, \ldots, 2n\}$.

Muistutus: jokaisesta laskuharjoituksesta saa lisäpisteitä seuraavasti: 4-7 ruksia = +1 p., 2-3 ruksia = +1/2 p. Tähtitehtävät ovat vaativampia ja niiden ratkaisusta saa merkitä 2 ruksia.