Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka, kesä 2016
Harjoitus 3, ratkaisut

1. Olkoot X ja Y sellaisia äärellisiä joukkoja, että $|X| < |Y|$. Näytä, että jokaisella kuvauksella $f : X \to Y$ on olemassa sellainen $y \in Y$ että $f(x) \neq y$ kaikilla $x \in X$. (Laatikkoperiaatteen "duaalinen" versio.)

   Ratkaisu. Oletetaan, että X ja Y ovat äärellisiä, $|X| < |Y|$ ja $f : X \to Y$. Tehdään nyt vastaoletus: oletetaan, että kaikille $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$.

   Tämä tarkoittaa, että kuvaus f on surjektio. Nyt Junnilan monisteen lemman II 1.1. mukaan on olemassa $A \subset X$ siten, että rajoittumakuvaus $f_{|A} : A \to Y$ on bijektio.

   Nyt $|X| \geq |A| = |Y|$, mikä on ristiriidassa oletuksen $|X| < |Y|$ kanssa. Vastaoletuksesta päädyttiin ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee. Nyt siis on olemassa $y \in Y$ siten, että $f(x) \neq y$ kaikilla $x \in X$.

2. Olkoon $A \subset [100]$ sellainen osajoukko, että A:han on umpimähkään valittu 56 (eri) alkiota. Näytä, että joukossa A on kaksi lukua, joiden erotus on 11.

   Ratkaisu. Halutaan osoittaa, että jollekin luvulle $a \in A$ on olemassa $b \in A$ siten, että $b = a + 11$. Merkitään tämän ehdon toteuttavaa joukkoa $A_{11} = \{b \in [100] : b = a + 11, a \in A\}$. Osoitetaan, että $A \cap A_{11} \neq \emptyset$.

   Tiedetään, että $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, joten
   $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$. Olkoon $X = A$ ja $Y = A_{11}$.

   Nyt $|X| = 56$. $|Y| \geq 56 - 11 = 45$, sillä jos $a \geq 90$, niin $b \notin [100]$. Nyt saadaan halutulle leikkausjoukolle seuraava arvio:

$$|A \cap A_{11}| = |A| + |A_{11}| - |A \cup A_{11}| \geq 56 + 45 - 100 = 1$$

   Joukossa $A \cap A_{11}$ on siis vähintään yksi alkio, joten joidenkin kahden A:n alkion erotus on 11.

3. Olkoon $A \subset [2n]$ mikä tahansa osajoukko, jolle $|A| = n+1$. Näytä, että joukossa A on kaksi (eri) lukua, joista toinen on jaollinen toisella.

   Ohje: kirjoita jokainen $m \in A$ muodossa $m = 2^r \cdot k$, missä k on pariton, ja käytä laatikkoperiaatetta.

   Ratkaisu. Halutaan siis osoittaa, että on olemassa $a_1, a_2 \in A$ siten, että $a_1 \neq a_2$ ja $a_1 | a_2$.

   Kaikki luvut $m \in A$ voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa:
   $m = 2^r \cdot k$, missä $r \in \mathbb{N}$ ja k on pariton, $k \in [2n-1]$. Merkitään K:llä näiden lukujen k mahdollisia arvoja. Nyt $|K| = n$.

   (Tämä esitys voidaan määrittää mille tahansa luvulle. Jos m on pariton, niin $m = 2^0 \cdot m$. Jos m on parillinen, niin valitaan suurin r jolle $2^r | m$. Nyt $m = 2^r \cdot s$, missä s on pariton.)

   Valitaan jokaiselle luvulle m sitä vastaava luku k. Koska nyt
   $|A| = n+1 \geq n = |B|$, laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa luvut $a_1, a_2 \in A$ siten, että $a_1 \neq a_2$ ja

   $$a_1 = 2^{r_1} \cdot k \text{ ja } a_2 = 2^{r_2} \cdot k.$$

   Sovitaan, että merkitään luvuista suurempaa a_2:lla, eli $r_2 > r_1$. Nyt

   $$a_2 = 2^{r_2} \cdot 2^{-r_1} \cdot a_1 = 2^{r_2 - r_1} \cdot a_1.$$

   Koska $r_2 - r_1 > 0$, niin $2^{r_2 - r_1} \in \mathbb{N}$. Näin ollen $a_1 | a_2$.

4. Olkoon X äärellinen joukko, $A \subset X$ annettu osajoukko, sekä

   $$\mathcal{P}_A(X) = \{B \in \mathcal{P}(X) : A \subset B\}.$$

   Etsi lukumäärälle $|\mathcal{P}_A(X)|$ kaava.

   Ratkaisu. Olkoon $|X| = n$ ja $|A| = k$. Tiedetään, että $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Halutaan nyt selvittää, kuinka moni näistä joukoista sisältää joukon A.

   Kaikille $B \in \mathcal{P}_A(X)$ pätee $B = A \cup B'$ siten, että $B' = B \setminus A$. Nyt $B' \in \mathcal{P}(X \setminus A)$. Joukon $\mathcal{P}_A(X)$ koko on siis sama kuin A:n komplementin potenssijoukon koko.

   Määritellään kuvaus $\phi : \mathcal{P}_A(X) \to \mathcal{P}(X \setminus A)$ siten, että $\phi(B) = B'$. Tämä kuvaus on bijektiivinen, joten

   $$|\mathcal{P}_A(X)| = |\mathcal{P}(X \setminus A)| = 2^{|X \setminus A|} = 2^{n-k}.$$

5. Olkoon $|X| = n$. Kuinka monta

   (i) eri relaatiota R on joukossa X?

   (ii) eri refleksiivistä relaatiota R on joukossa X?

   Ratkaisu. (i) Kaikille relaatioille R pätee $R \subset X \times X$. Tiedetään myös, että $|X \times X| = |X| \cdot |X| = n^2$.
   Eri relaatioiden lukumäärä on sama kuin joukon $X \times X$ mahdollisten osajoukkojen määrä. Niitä on siis
   $|\mathcal{P}(X \times X)| = 2^{|X \times X|} = 2^{n^2}$ kappaletta.

   (ii) Joukkoon $X \times X$ kuuluu n paria, jotka ovat muotoa (x, x).
   Käytetään hyväksi tehtävän 4 tulosta. Valitaan joukko
   $A = \{(x, x) | x \in X\}$. Nyt $|A| = n$, joten refleksiivisiä relaatioita on $|\mathcal{P}_A(X \times X)| = |\mathcal{P}((X \times X) \setminus A)| = 2^{n^2 - n} = 2^{n(n-1)}$ kappaletta.

6.* Olkoon X joukko jossa on n alkiota. Asetetaan

$$\mathcal{P}_e(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ parillinen}\}$$

sekä

$$\mathcal{P}_o(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ pariton}\}.$$

Osoita, että tällöin $|\mathcal{P}_e(X)| = 2^{n-1}$ ja $|\mathcal{P}_o(X)| = 2^{n-1}$.

Ratkaisu. Oletetaan, että X on epätyhjä joukko, ts. $n > 0$.

Joukot $\mathcal{P}_e(X)$ ja $\mathcal{P}_o(X)$ ovat erillisiä, joten

$$|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}_e(X)| + |\mathcal{P}_o(X)| = 2^n.$$

Riittää siis osoittaa, että $|\mathcal{P}_o(X)| = 2^{n-1}$.

Valitaan nyt jokin $x \in X$. Olkoon $A \subset X \setminus \{x\}$. Määritellään kuvaus $\phi : \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \to \mathcal{P}_o(X)$ seuraavasti:

$$\phi(A) = \begin{cases} A, \text{ jos} |A| \text{ on pariton} \\ A \cup \{x\}, \text{ jos} |A| \text{ on parillinen} \end{cases}$$

Halutaan osoittaa, että kuvaus ϕ on bijektio, koska silloin
$|\mathcal{P}(X \setminus \{x\})| = |\mathcal{P}_o(X)| = 2^{n-1}$. Osoitetaan, että kuvaus on sekä injektio että surjektio.

Injektiivisyys: Ol. $A, B \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ ja $\phi(A) = \phi(B)$. Nyt pätee joko $B = A$, $B \cup \{x\} = A \cup \{x\}$ tai $B = A \cup \{x\}$. Koska $B, A \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$, niin $B = A$. Kuvaus ϕ on siis injektio.

Surjektiivisyys: Ol. $B \in \mathcal{P}_o(X)$, $|B| = 2k + 1$.

Jos $x \in B$, niin $|B \setminus \{x\}| = 2k$. Tällöin $\phi(B \setminus \{x\}) = (B \setminus \{x\}) \cup \{x\} = B$.

Jos $x \notin B$, niin $B \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ ja $\phi(B) = B$.

Kuvaus ϕ on siis injektiona ja surjektiona bijektio, joten $|\mathcal{P}_o(X)| = 2^{n-1}$.