

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kombinatoriikka  
Harjoitus 3 (7.6-9.6.2016)

Muistutuksia:  $[n] = \{1, \dots, n\}$  kun  $n \in \mathbb{N}^*$ . Joukon  $X$  potenssijoukko on  $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$  ja joukon  $A$  alkioden lukumäärä merkitään  $|A|$ . Joukon  $X$  relaatio  $R$  on mikä tahansa osajoukko  $R \subset X \times X$ .

1. Olkoot  $X$  ja  $Y$  sellaisia äärellisiä joukkoja, että  $|X| < |Y|$ . Näytä, että jokaisella kuvauksella  $f : X \rightarrow Y$  on olemassa sellainen  $y \in Y$  että  $f(x) \neq y$  kaikilla  $x \in X$ . (Laatikkoperiaatteen ”duaalin” versio.)
2. Olkoon  $A \subset [100]$  sellainen osajoukko, että  $A$ :han on umpimähkään valittu 56 (eri) alkioita. Näytä, että joukossa  $A$  on kaksi lukua, joiden erotus on 11.
3. Olkoon  $A \subset [2n]$  mikä tahansa osajoukko, jolle  $|A| = n + 1$ . Näytä, että joukossa  $A$  on kaksi (eri) lukua, joista toinen on jaollinen toisella. *Ohje:* kirjoita jokainen  $m \in A$  muodossa  $m = 2^r \cdot k$ , missä  $k$  on pariton, ja käytä laatikkoperiaatetta.
4. Olkoon  $X$  äärellinen joukko,  $A \subset X$  annettu osajoukko, sekä

$$\mathcal{P}_A(X) = \{B \in \mathcal{P}(X) : A \subset B\}.$$

Etsi lukumäärälle  $|\mathcal{P}_A(X)|$  kaava.

5. Olkoon  $|X| = n$ . Kuinka monta
  - (i) eri relaatiota  $R$  on joukossa  $X$ ?
  - (ii) eri refleksiivistä relaatiota  $R$  on joukossa  $X$ ? (Relaatio  $R$  on *refleksiivinen* jos  $\{(x, x) : x \in X\} \subset R$ .)

6\*. Olkoon  $X$  joukko jossa on  $n$  alkioita. Asetetaan  $\mathcal{P}_e(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ parillinen}\}$  sekä  $\mathcal{P}_o(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \text{ pariton}\}$ . Osoita, että tällöin  $|\mathcal{P}_e(X)| = 2^{n-1}$  ja  $|\mathcal{P}_o(X)| = 2^{n-1}$ . *Ohje:* kiinnitä  $x \in X$  sekä määrittele kuvaus  $\phi : \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \rightarrow \mathcal{P}_o(X)$  ehdolla  $\phi(A) = A$  jos  $|A|$  on pariton, ja  $\phi(A) = A \cup \{x\}$  jos  $|A|$  on parillinen. Tarkista, että  $\phi$  on bijektio. (Kommentti: väite seuraa myöhemmin kurssilla myös muista tuloksista.)

*Muistutus:* jokaisesta laskuharjoituksesta saa lisäpisteitä seuraavasti: 4-7 ruksia = +1 p., 2-3 ruksia = +1/2 p. Tähtitehtävät ovat vaativampia ja niiden ratkaisusta saa merkitä 2 ruksia.