Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka kesä 2016
Harjoitus 2 ratkaisuehdotukset

Kurssin merkintöjä: $[n] = \{1, \ldots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$ ja $[0] = \emptyset$. Jos X on joukko, niin $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ on sen *potenssijoukko*. Jos $A \subset X$ niin $A^c = X \setminus A$ on A:n *komplementti* joukossa X.

1. Olkoon joukoissa A ja B parillinen määrä alkioita, sekä yhdisteessä $A \cup B$ pariton määrä. Näytä, että leikkausjoukossa $A \cap B$ on pariton määrä alkioita.

Ratkaisu. Olkoon mainittujen joukkojen alkioiden lukumäärät $|A| = 2m$, $|B| = 2n$, sekä $|A \cup B| = 2r + 1$, missä $m, n, r \in \mathbb{N}$ ja $r < m + n$.
Luennoilla ollaan todettu että

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \tag{1}$$

joten voidaan laskea

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| \\ &= 2m + 2n - (2r + 1) = 2(m + n - r) - 1. \end{aligned}$$

Voidaan siis todeta että joukossa $A \cap B$ tosiaan on pariton määrä alkioita.

2. Olkoon X äärellinen joukko, sekä $A \subset X$, $B \subset X$ osajoukkoja. Näytä, että

$$|A^c \cap B^c| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Ratkaisu. Ensinnäkin palautetaan mieleen että de Morganin lain mukaan pätee

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c. \tag{2}$$

Käyttäen edellä mainittuja yhtälöitä (1) ja (2), sekä Junnilan monisteen korollaaria 2.14 voidaan laskea

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c| &= |(A \cup B)^c| = |X \setminus (A \cup B)| \\ &= |X| - |(A \cup B)| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \end{aligned}$$

jolloin ollaan päädytty haluttuun yhtälöön.

3. Näytä tarkasti, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ääretön, ts. $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen joukko. *Vihje:* tee esimerkiksi vastaoletus että on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\phi : \mathbb{N} \to [n]$, ja tutki rajoittumakuvausta $\phi_{|[n+1]} : [n+1] \to [n]$.

Ratkaisu. Seurataan vihjettä ja tehdään vastaoletus että $\mathbb{N}$ on äärellinen, jolloin Junnilan äärellisyyden määritelmän (2.4) mukaisesti on olemassa $n \in \mathbb{N}$ jolla on bijektio $\phi : \mathbb{N} \to [n]$.
Todetaan ensin että pätee $[n+1] \subset \mathbb{N}$, jolloin voidaan tarkastella rajoittumakuvausta $\phi_{|[n+1]} : [n+1] \to [n]$. Huomataan Junnilan monisteen lauseen 2.7 mukaisesti että vähintään kaksi joukon $[n+1]$ alkioista kuvautuu samaksi alkioksi, jolloin kuvaus ei voi olla injektiviinen. Koska rajoittumakuvaus ei ole injektiivinen, ei myöskään alkuperäinen kuvaus ole, jolloin päädytään ristiriitaan oletuksemme kanssa.
Näin ollen pätee että $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen joukko, eli $\mathbb{N}$ on ääretön.

4. Relaatio $R \subset X \times X$ on *transitiivinen* jos aina ehdoista xRy ja yRz seuraa xRz (missä $x, y, z \in X$). Näytä: relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subset R$.

Ratkaisu. Osoitetaan väite yksi suunta kerrallaan:
"$\Rightarrow$": Oletetaan että R on transitiivinen. Oletetaan lisäksi että pari $(x, z) \in R \circ R$. Näin ollen on olemassa $y \in X$, siten että xRy ja yRz. Koska R oletettiin transitiiviseksi, niin tästä seuraa että xRz, eli $(x, z) \in R$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan että $R \circ R \subset R$. Oletetaan myös että xRy ja yRz, missä $x, y, z \in X$. Todetaan että tällöin $x(R \circ R)z$, eli $(x, z) \in R \circ R$, jolloin oletuksen mukaan myös pätee $(x, z) \in R$, eli xRz.

5. Kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty)$ on joukon X *metriikka* jos
(i) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.
Olkoon X äärellinen joukko ja $d_\Delta(A, B) = |A \Delta B|$ kun $A, B \subset X$, missä $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ on symmetrinen erotusjoukko. Näytä, että d_Δ on metriikka potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$.

Ratkaisu. Oletetaan että $A, B, C \subset X$ ja osoitetaan väite ehto kerrallaan:
(i)
"$\Rightarrow$": Oletetaan että $d_\Delta(A, B) = 0$. Tällöin pätee siis

$$|A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = 0.$$

Todetaan että joukot $A \setminus B$ ja $B \setminus A$ ovat erilliset, joten

$$|(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |(A \setminus B)| + |(B \setminus A)| = 0.$$

Näin ollen täytyy päteä että $A \setminus B = \emptyset$ ja $B \setminus A = \emptyset$, jolloin $A \subset B$ ja $B \subset A$, eli $A = B$.
"$\Leftarrow$": Todetaan että

$$d_\Delta(A, A) = |A \Delta A| = |(A \setminus A) \cup (A \setminus A)| = |\emptyset \cup \emptyset| = 0.$$

(ii)
Yhdisteen symmetrisyyden nojalla myös symmetrinen erotusjoukko on symmetrinen, joten voidaan todeta että

$$\begin{aligned} d_\Delta(A, B) &= |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| \\ &= |(B \setminus A) \cup (A \setminus B)| = |B \Delta A| = d_\Delta(B, A). \end{aligned}$$

(iii)
Todetaan aluksi Junnilan lauseen 2.7 nojalla että seuraavat epäyhtälöt pätevät:

$$|A \cap B \cap C| \leq |A \cap C|, \quad |(A \cup C) \cap B| \leq |B|.$$

Lasketaan tämän lisäksi auki jälkimmäisen epäyhtälön vasempi puoli, käyttäen yhtälöä (1):

$$|(A \cup C) \cap B| = |(A \cap B) \cup (B \cap C)| = |A \cap B| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Näiden valmistelevien epä/yhtälöiden, sekä tehtävässä annetun vihjeen avulla voidaan nyt todeta että:

$$\begin{aligned} d_\Delta(A, C) &= |A \Delta C| = |A| + |C| - 2|A \cap C| \\ &\leq |A| + |C| - 2|A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |C| - 2(|A \cap B| + |B \cap C| - |(A \cup C) \cap B|) \\ &\leq |A| - 2|A \cap B| + 2|B| + |C| - 2|B \cap C| \\ &= |A \Delta B| + |B \Delta C| = d_\Delta(A, B) + d_\Delta(B, C). \end{aligned}$$

Todetaan että d_Δ toteuttaa kaikki kolme ehtoa, ja on näin ollen metriikka potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$.

6^*. Olkoon X epätyhjä äärellinen joukko ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukon X osajoukkoperhe, että $|\mathcal{A}| \leq |X|$. Osoita, että on olemassa sellainen alkio $x \in X$, että perheelle

$$\mathcal{A}' = \{A \setminus \{x\} : A \in \mathcal{A}\}$$

pätee edelleen $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|$.

Vihje: induktio luvun $n = |X|$ suhteen. Induktioaskel: olkoon $|X| = n$ ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ joukkoperhe jolle $|\mathcal{A}| = n$. Kiinnitä $p \in X$ ja tarkastele joukon $X \setminus \{p\}$ joukkoperhettä

$$\mathcal{B} = \{A \setminus \{p\} : A \in \mathcal{A}\}.$$

Jos $|\mathcal{B}| = n$ niin väite on selvä. Jos taas $|\mathcal{B}| < n$, niin sovella induktio-oletusta perheeseen $\mathcal{B}$ joukossa $X \setminus \{p\}$.

Ratkaisu. Seurataan vihjettä ja käytetään induktiota joukon X koon suhteen. Jos $|X| = 1$, niin perheet $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}'$ ovat molemmat tyhjiä, tai molemmissa on yksi joukko.
Induktioaskel: Oletetaan että väite pätee luvulla $n \geq 1$. Olkoon $|X| = n + 1$ ja $p \in X$. Merkitään $\mathcal{B} = \{A \setminus \{p\} | A \in \mathcal{A}\}$. Joukkoja ei tule ainakaan lisää, joten $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|$. Nyt jos $|\mathcal{B}| = n + 1$ väite on todistettu, joten oletetaan että $|\mathcal{B}| \leq n$. Nyt $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X \setminus \{p\})$ ja $|X \setminus \{p\}| = n$, joten induktio-oletuksen mukaan tällöin on olemassa sellainen $y \in X \setminus \{p\}$, että

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{B}|, \quad \text{missä} \quad \mathcal{C} = \{B \setminus \{y\} | B \in \mathcal{B}\}.$$

Määritellään

$$\mathcal{A}' = \{A \setminus \{y\} | A \in \mathcal{A}\}.$$

Nyt on voimassa $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|$. Jos nimittäin pätee $|\mathcal{A}'| < |\mathcal{A}|$, niin on olemassa $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, joille $A_1 \setminus \{y\} = A_2 \setminus \{y\}$, mutta $A_1 \neq A_2$. Merkitään $E = A_1 \setminus \{y\} = A_2 \setminus \{y\}$, jolloin $\{A_1, A_2\} = \{E, E \cup \{y\}\}$. Olkoon vaikkapa $A_1 = E$ ja $A_2 = E \cup \{y\}$. Koska $p \neq y$, on voimassa $E \setminus \{p\} \neq (E \cup \{y\}) \setminus \{p\}$. Tästä seuraa, että

$$\underbrace{A_1 \setminus \{p\}}_{\in \mathcal{B}} \neq \underbrace{A_2 \setminus \{p\}}_{\in \mathcal{B}}, \text{ mutta } \underbrace{A_1 \setminus \{p, y\}}_{\in \mathcal{C}} = \underbrace{A_2 \setminus \{p, y\}}_{\in \mathcal{C}},$$

mikä on vastoin induktio-oletusta, jonka mukaan $|\mathcal{C}| = |\mathcal{B}|$. Siis välttämättä $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|$, ja väite on jälleen todistettu.