Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Harjoitus 2 (31.5-2.6.2016)

Kurssin merkintöjä: $[n] = \{1, \dots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$ ja $[0] = \emptyset$. Jos X on joukko, niin $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ on sen *potenssijoukko*. Jos $A \subset X$ niin $A^c = X \setminus A$ on A:n *komplementti* joukossa X.

1. Olkoon joukoissa A ja B parillinen määrä alkioita, sekä yhdisteessä $A \cup B$ pariton määrä. Näytä, että leikkausjoukossa $A \cap B$ on pariton määrä alkioita.

2. Olkoon X äärellinen joukko, sekä $A \subset X$, $B \subset X$ osajoukkoja. Näytä, että

$$|A^c \cap B^c| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

3. Näytä tarkasti, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ääretön, ts. $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen joukko. *Vihje:* tee esimerkiksi vastaoletus että on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\phi : \mathbb{N} \to [n]$, ja tutki rajoittumakuvausta $\phi_{|[n+1]} : [n+1] \to [n]$.

4. Relaatio $R \subset X \times X$ on *transitiivinen* jos aina ehdoista xRy ja yRz seuraa xRz (missä $x, y, z \in X$). Näytä: relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subset R$.

5. Kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty)$ on joukon X *metriikka* jos
   (i) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
   (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,
   (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Olkoon X äärellinen joukko ja $d_\Delta(A, B) = |A \Delta B|$ kun $A, B \subset X$, missä $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ on symmetrinen erotusjoukko. Näytä, että d_Δ on metriikka potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$. *Lisävihje:* luennoilla johdettu kaava $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ on hyödyllinen.

6*. Olkoon X epätyhjä äärellinen joukko ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukon X osajoukkoperhe, että $|\mathcal{A}| \leq |X|$. Osoita, että on olemassa sellainen alkio $x \in X$, että perheelle

$$\mathcal{A}' = \{A \setminus \{x\} : A \in \mathcal{A}\}$$

pätee edelleen $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}|$.

Vihje: induktio luvun $n = |X|$ suhteen. Induktioaskel: olkoon $|X| = n$ ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ joukkoperhe jolle $|\mathcal{A}| = n$. Kiinnitä $p \in X$ ja tarkastele joukon $X \setminus \{p\}$ joukkoperhettä

$$\mathcal{B} = \{\{A \setminus \{p\} : A \in \mathcal{A}\}.$$

Jos $|\mathcal{B}| = n$ niin väite on selvä. Jos taas $|\mathcal{B}| < n$, niin sovella induktio-oletusta perheeseen $\mathcal{B}$ joukossa $X \setminus \{p\}$.

Muistutus: jokaisesta laskuharjoituksesta saa lisäpisteitä seuraavasti: 4-7 ruksia = +1 p., 2-3 ruksia = +1/2 p. Tähtitehtävät ovat vähän vaativampia ja niiden ratkaisusta saa merkitä 2 ruksia.