Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka, kesä 2016
Harjoitus 1, ratkaisut

1. Näytä, että
$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$$
jos ja vain jos $a = u$ ja $b = v$. (Siis $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ on tarkka määritelmä järjestetylle parille.)

   Ratkaisu. Selvästi jos $a = u$ ja $b = v$, niin $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$.

   Oletetaan, että $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$.

   Nyt $\{a\} = \{u\}$ tai $\{a\} = \{u,v\}$.

   Tapaus 1: $a = u$. Täytyy osoittaa, että $b = v$. Nyt $\{a,b\} = \{u\}$ tai $\{a,b\} = \{u,v\}$. Jos $\{a,b\} = \{u\}$, niin $a = b = u$, joten
$$\{a\} = \{a,b\} = \{u\} = \{u,v\}.$$
   Tämän perusteella $a = b = u = v$, joten väite pätee.

   Jos $\{a,b\} = \{u,v\}$ ja $a = u$, niin $\{a,b\} = \{u,b\} = \{u,v\}$. Nyt $b = u$ tai $b = v$. Jos $b = v$, väite pätee. Jos $b = u$, niin $\{a,b\} = \{u,u\} = \{u,v\}$, joten $b = u = v$. Tässäkin väite pätee.

   Tapaus 2: $\{a\} = \{u,v\}$. Koska joukot voivat olla samat vain, jos niiden alkiot ovat täsmälleen samat, on $a = u = v$. Nyt
$$\{\{u\},\{u,v\}\} = \{\{u\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}.$$
   Tämän perusteella $\{a,b\} = \{\{u\}\}$, joten $a = b = u = v$.

   Kkaikissa tapauksissa väite pätee. Näin ollen jos
$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$$
   niin $a = u$ ja $b = v$.

2. Olkoot $R, S \subset X \times Y$ relaatioita, sekä asetetaan
$$R(A) = \{y \in Y : \text{on olemassa } a \in A \text{ jolle } aRy\},$$
kun $A \subset X$. Merkitään lisäksi $R(a) = R(\{a\})$ kun $a \in X$.

(i) Näytä, että $(R \cup S)(A) = R(A) \cup S(A)$ ja $(R \cap S)(A) \subset R(A) \cap S(A)$.

(ii) Näytä, että $(R \cap S)(a) = R(a) \cap S(a)$ kaikilla $a \in X$.

Ratkaisu. (i) Osoitetaan ensin, että $(R \cup S)(A) = R(A) \cup S(A)$.
Ol. $y \in (R \cup S)(A)$. Nyt on olemassa luku $a \in A$ siten, että $a(R \cup S)y$. Näin ollen $y \in R(A)$ tai $y \in S(A)$, joten $y \in R(A) \cup S(A)$.
Toisaalta ol. $y \in R(A) \cup S(A)$. Nyt on olemassa luku $a \in A$ siten, että $y \in (R \cup S)(A)$. Siis $(R \cup S)(A) = R(A) \cup S(A)$.

Osoitetaan nyt, että $(R \cap S)(A) \subset R(A) \cap S(A)$. Ol. $y \in (R \cap S)(A)$. Näin ollen on olemassa $a \in A$ siten, että $a(R \cap S)y$, joten aRy ja aSy. Näin ollen $y \in R(A) \cap S(A)$.
(Tässä joukkojen välillä ei ole yhtäsuuruutta; joukkoon $(R \cap S)(A)$ kuuluvat sellaiset luvut y, joille löytyy yksi $a \in A$ siten, että molemmat relaatiot toteutuvat. Joukkoon $R(A) \cap S(A)$ taas kuuluvat luvut y, joille löytyy mahdollisesti toisistaan eroavat luvut $a_1, a_2 \in A$ siten, että $a_1 R y$ ja $a_2 S y$.)

(ii) Koska $\{a\} \subset X$, selvästi $(R \cap S)(a) \subset R(a) \cap S(a)$. Toisaalta jos $y \in R(a) \cap S(a)$, niin aRy ja aSy. Näin ollen $y \in (R \cap S)(a)$ eli $R(a) \cap S(a) \subset (R \cap S)(a)$. Näin ollen yhtäsuuruus joukkojen välillä patee.

3. Joukon X relaatio R on *refleksiivinen* jos $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subset R$. Näytä, että tällöin $R \subset R \circ R$.

Ratkaisu. Relaatio $R \circ R \subset X \times X$ toteuttaa relaatioiden yhdistelmän määritelmän mukaan seuraavan ehdon:

$$x(R \circ R)z \Leftrightarrow \text{ on olemassa } y \in X \text{ s.e. } xRy \text{ ja } yRz$$

Ol. $(x,z) \in R$. Koska relaatio R on refleksiivinen, myös $(x,x) \in R$. Näin ollen luvuille x, z on olemassa luku $y = x \in X$ siten, että xRx ja xRz. Näin ollen $(x,z) \in R \circ R$ ja täten $R \subset R \circ R$.

4. Etsi sellainen joukon $[3] = \{1,2,3\}$ relaatio R, että $R^k \neq R^{k+1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}^*$. (Tässä R^k määritellään ehdoilla $R^1 = R$ ja $R^{k+1} = R \circ R^k$ kun $k \in \mathbb{N}^*$.)

Ratkaisu. Määritellään relaatio R seuraavasti:

$$R = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$$

Relaatiota voidaan ajatella permutaationa, joka vaihtaa alkioiden 1 ja 2 paikkoja. Nyt

$$R \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \neq R$$

ja

$$R \circ R^2 = \{(1,2),(2,1),(3,3)\} \neq R^2.$$

Nyt siis

$$R^{2k} = \{(1,2),(2,1),(3,3)\} \text{ ja } R^{2k+1} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = \Delta_{[3]}$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen $R^n \neq R^{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

5. Luku $m \in \mathbb{N}$ jakaa luvun $n \in \mathbb{N}$, merkitään $m|n$, jos on olemassa $k \in \mathbb{N}$ jolle $n = k \cdot m$. Määritellään joukon $\mathbb{N}$ relaatio J ehdolla mJn jos ja vain jos $m|n$.

   (i) Tarkista, että J on joukon $\mathbb{N}$ osittainen järjestys.

   (ii) Olkoot $A = \{6, 8, 24, 72\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100, 3Jn \text{ tai } 5Jn\}$. Selvitä osittain järjestetyn joukon $(\mathbb{N}, J)$ osajoukoille A ja B pienimmän ja suurimman alkion olemassaolo.

   Ratkaisu. (i) Relaatio J on joukon $\mathbb{N}$ osittainen järjestys, jos se on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Käydään ehdot läpi.

   (a) *Refleksiivisyys*
   $m = 1 \cdot m$, joten $m|m$. Näin ollen mJm kaikilla $m \in \mathbb{N}$, joten relaatio J on refleksiivinen.

(b) *Antisymmetrisyys*

Ol. mJn. Nyt siis on olemassa $k_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $m = k_1 \cdot n$.
Ol. myös nJm. Nyt on olemassa $k_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $n = k_2 \cdot m$.
Yhdistämällä nämä ehdot saadaan

$$n = k_2 \cdot m \text{ ja } n = \frac{m}{k_1} \Leftrightarrow m = k_1 k_2 \cdot m.$$

Tämä pätee, jos

$$m = 0 \text{ tai } k_1 \cdot k_2 = 1.$$

Jos $m = 0$, niin $n = k_2 \cdot 0 = 0$. Jos luvuille $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ pätee $k_1 \cdot k_2 = 1$, täytyy olla $k_1 = k_2 = 1$. Molemmissa tapauksissa $n = m$.

Näin ollen jos mJn ja nJm, niin $n = m$. Relaatio on siis antisymmetrinen.

(c) *Transitiivisuus*

Ol. mJn ja nJo. On siis olemassa luvut $k_1, k_2 \in N$ siten, että

$$m = k_1 \cdot n \text{ ja } n = k_2 \cdot o \Leftrightarrow m = k_1 k_2 \cdot o.$$

Koska $k_1, k_2 \in N$, niin myös $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$. Näin ollen mJo ja relaatio on siis transitiivinen.

(ii) Joukko $(\mathbb{N}, J)$ on osittain järjestetty. Joukon $\mathbb{N}$ osajoukon X *pienin alkio* on sellainen alkio $p \in X$ siten, että kaikille $x \in X$ pätee pJx eli $p|x$. Vastaavasti *suurin alkio* on alkio $s \in X$ siten, että kaikille $x \in X$ pätee xJs eli $x|s$.

Joukon A suurin alkio on 72, sillä

$$72 = 3 \cdot 24 = 9 \cdot 8 = 12 \cdot 6.$$

Joukossa A ei ole pienintä alkiota, sillä $6 \nmid 8$ ja $8 \nmid 6$. Niitä ei siis voi verrata keskenään relaation J suhteen.

Joukko B koostuu kahdesta osasta:

$$B = \{0, 3, 6, \ldots, 99\} \cup \{0, 5, 10, \ldots, 100\}$$

Joukossa B ei ole pienintä alkiota. Tehdään vastaoletus: joukossa B on pienin alkio $p = \min B$. Nyt pitää olla $p|3$. Koska kolme on alkuluku, tulee olla $p = 1$ tai $p = 3$. $1 \notin B$, joten $p = 3$. Kuitenkin $3 \nmid 5$, joten $p = 3$ ei voi olla B:n pienin alkio. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksemme kanssa, joten joukossa B ei ole pienintä alkiota.

Yllättäen joukon B suurin alkio on 0, sillä $0 \in \mathbb{N}$ ja $0 = b \cdot 0$ kaikilla $b \in B$.

6.* Jos P on luonnollisten lukujen ominaisuus, niin $P(n)$ tarkoittaa että luvulla $n \in \mathbb{N}$ on ominaisuus P.

Induktioperiaate: Jos

(i) $P(0)$, ja

(ii) aina jos $n \in \mathbb{N}$ ja $P(n)$, niin $P(n + 1)$,

niin tällöin $\{n \in \mathbb{N} : P(n)\} = \mathbb{N}$.

Osoita, että Induktioperiaate on yhtäpitävä monisteen *Induktioaksioo-man* kanssa.

(*Vihje:* tutki Junnilan monistetta, sivut 11-12.)

Ratkaisu. *Induktioaksiooma* $\Rightarrow$ *induktioperiaate*:

(Junnilan monisteen korollaari 2.3)

Jos luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ on ominaisuus P, merkitään $P(n)$. Jos ominaisuus ei päde luvulle n, merkitään $\neg P(n)$. Osoitetaan, että jos induktioperiaatteen kohdat (i) ja (ii) toteutuvat, ominaisuus P pätee kaikille luonnollisille luvuille n.

Olkoon $B = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$ niiden lukujen joukko, joille ominaisuus P ei päde. Halutaan osoittaa, että $B = \emptyset$, eli kaikilla luvuilla n pätee $P(n)$.

Tehdään vastaoletus: $B \neq \emptyset$. Merkitään $a = \min B$. Induktioaksiooman mukaan a on olemassa. Induktioperiaatteen kohdan (i) perusteella $P(0)$, joten $0 \notin B$ ja $a > 0$. Koska a on joukon B pienin alkio, $a - 1 \notin B$ ja siten $P(a - 1)$.

Kuitenkin induktioperiaatteen kohdan (ii) mukaan täytyy päteä
$P(a - 1 + 1) = P(a)$. Tästä seuraa, että $a \notin B$. Tämä on ristiriidassa vastaoletuksemme kanssa, joten aluperäinen väite pätee. Nyt siis
$B = \emptyset$, joten jos induktioperiaatteen ehdot (i) ja (ii) pätevät, pätee ominaisuus P kaikille luonnollisille luvuille n.

Induktioperiaate $\Rightarrow$ *induktioaksiooma*:

Oletetaan, että induktioperiaate pätee kaikille luonnollisia lukuja koskeville väitteille P. Oletetaan lisäksi, että $A \subset \mathbb{N}$ ja $A \neq \emptyset$.

Halutaan nyt osoittaa, että on olemassa luku $p \in A$ siten, että $p \leq a$ kaikilla $a \in A$.

Tehdään nyt vastaoletus: joukossa A ei ole pienintä alkiota. Sovelletaan induktioperiaatetta väitteeseen

$$Q(n) \Leftrightarrow 0, 1, \ldots, n \notin A.$$

Joukko $\mathbb{N}$ on alhaalta rajoitettu ja 0 on sen pienin alkio. Näin ollen $0 \notin A$, joten $Q(0)$ pätee.

Tehdään induktio-oletus: ol. $Q(k)$ eli luvut $0, \ldots, k \in \mathbb{N}$ eivät kuulu joukkoon A. Jos luku $k+1$ kuuluisi joukkoon A, se olisi A:n pienin alkio. Tämä on ristiriidassa tehdyn vastaoletuksen kanssa, joten $k + 1 \notin A$. Nyt siis $Q(k) \Rightarrow Q(k + 1)$.

Induktioperiaatteen kohtien (i) ja (ii) perusteella kaikille luonnollisille luvuille $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \notin A$. Näin ollen $A = \emptyset$, mikä on ristiriidassa oletuksiemme kanssa. Joukossa A on siis pienin alkio, joten induktioaksiooma seuraa induktioperiaatteesta.