

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Harjoitus 1 (24.5-26.5. 2016)

Jokaisesta laskuharjoituksesta saa lisäpisteitä seuraavasti: 4-7 ruksia = +1 p., 2-3 ruksia = +1/2 p. Tähtitehtävät ovat ehkä vähän vaativampia ja niiden ratkaisusta saa merkitä 2 ruksia.

1. Näytä että

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

jos ja vain jos $a = u$ ja $b = v$. (Siis $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ on tarkka määritelmä järjestetyille parille.)

2. Olkoot $R, S \subset X \times Y$ relaatioita, sekä asetetaan

$$R(A) = \{y \in Y : \text{on olemassa } a \in A \text{ jolle } aRy\},$$

kun $A \subset X$. Merkitään lisäksi $R(a) = R(\{a\})$ kun $a \in X$.

(i) Näytä, että $(R \cup S)(A) = R(A) \cup S(A)$ ja $(R \cap S)(A) \subset R(A) \cap S(A)$.

(ii) Näytä, että $(R \cap S)(a) = R(a) \cap S(a)$ kaikilla $a \in X$.

3. Joukon X relaatio R on *refleksiivinen* jos $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subset R$. Näytä, että tällöin $R \subset R \circ R$.

4. Etsi sellainen joukon $[3] = \{1, 2, 3\}$ relaatio R , että $R^k \neq R^{k+1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}^*$. (Tässä R^k määritellään ehdoilla $R^1 = R$ ja $R^{k+1} = R \circ R^k$ kun $k \in \mathbb{N}^*$.)

5. Luku $m \in \mathbb{N}$ jakaa luvun $n \in \mathbb{N}$, merkitään $m|n$, jos on olemassa $k \in \mathbb{N}$ jolle $n = k \cdot m$. Määritellään joukon \mathbb{N} relaatio J ehdolla mJn jos ja vain jos $m|n$.

(i) Tarkista, että J on joukon \mathbb{N} osittainen järjestys.

(ii) Olkoot $A = \{6, 8, 24, 72\}$ ja $B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100, 3Jn \text{ tai } 5Jn\}$.

Selvitä osittain järjestetyn joukon (\mathbb{N}, J) osajoukoille A ja B pienimmän ja suurimman alkion olemassaolo.

6*. Jos P on luonnollisten lukujen ominaisuus, niin $P(n)$ tarkoittaa että luvulla $n \in \mathbb{N}$ on ominaisuus P . *Induktioperiaate*: jos

(i) $P(0)$, ja

(ii) aina jos $n \in \mathbb{N}$ ja $P(n)$, niin $P(n+1)$,

niin tällöin $\{n \in \mathbb{N} : P(n)\} = \mathbb{N}$. Osoita että Induktioperiaate on yhtäpitävä monisteen *Induktioaksioman* kanssa. (*Vihje*: tutki Junnilan monistetta, sivut 11-12.)