

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kombinatoriikka
Erilliskoe 15.6.2016
Koeaika: 3 t 30 min

Muistutus merkinnöistä: luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ sekä $[n] = \{1, \dots, n\}$ kun $n \in \mathbb{N}^*$. Joukon A alkioden lukumäärä on $|A|$.

1. Olkoon $A \subset [98]$ sellainen osajoukko että $|A| = 50$. Näytä, että on olemassa sellaisia lukuja $m, n \in A$, että $m + n = 99$.

2. Määritä kuinka monessa kuusinumeroisessa puhelinnumerossa esiintyy joku numero $\{0, 1, \dots, 9\}$ ainakin kahdesti.

3. Olkoon $A \subset [2n]$ mikä tahansa osajoukko, jolle $|A| = n + 1$. Näytä, että joukossa A on kaksi (eri) lukua, joista toinen on jaollinen toisella. *Ohje:* kirjoita jokainen $m \in A$ muodossa $m = 2^r \cdot k$, missä k on pariton, ja käytä laatikkoperiaatetta.

4. Määritä summa- ja erotusperiaatteen avulla kuinka moni luvuista $n \in [160]$ on jaollinen ainakin jollakin luvuista 3, 5 tai 11.

5. Rekursiivinen lukujono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on määritelty ehdoilla

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n, \quad \text{kun } n \geq 0,$$

sekä $a_0 = 0$ ja $a_1 = 1$. Etsi lukujonolle (a_n) yleinen kaava.